SS 2011 27. April 2011

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 2

Prof. Dr. Klaus Madlener Abgabe bis 04. Mai 2011 10:00 Uhr

1. Aufgabe: [Logische Äquivalenz, Erfüllbarkeit, Übung]
Seien p, q, r und s aussagenlogische Variablen und A, B, C Formeln. Zeigen Sie:

1. $\{p, p \vee q, p \to s, r \to q\} \models q \to p$
2. $\{p, p \vee q, p \to s, r \to q\} \models s$
3. $A \models\!\!\dashv \neg(\neg A))$
4. $A \wedge (B \wedge C) \models\!\!\dashv (A \wedge B) \wedge C$
5. $A \wedge (B \vee C) \models\!\!\dashv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
6. $\neg(A \wedge B) \models\!\!\dashv (\neg A \vee \neg B)$ und $\neg(A \vee B) \models\!\!\dashv (\neg A \wedge \neg B)$
7. $A \to B \models\!\!\dashv (\neg A) \vee B$

Welche verschiedenen Möglichkeiten gibt es, die obigen logischen Äquivalenzen zu zeigen?

2. Aufgabe: [vollständige Operatorenmengen, Übung]
Sei der NAND-Operator (oder auch Sheffer-Strich) | definiert durch

$$\varphi(A \mid B) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \varphi(A) = \varphi(B) = 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\{|\}$ eine vollständige Operatorenmenge ist.

3. Aufgabe: [boolesche Funktionen, Übung]
Zeigen Sie, dass sich jede boolesche Funktion $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ durch eine Aussageform in $p_1, \ldots, p_n$ und einer vollständigen Operatorenmenge darstellen lässt.

4. Aufgabe: [Operatorenmengen, Übung]
Sei $F(\{\neg, \leftrightarrow\})$ die Menge aller Formeln, in denen nur Variablen, $\neg$ und $\leftrightarrow$ vorkommen.
Zeigen Sie: Kommen in $A \in F(\{\neg, \leftrightarrow\})$ genau n verschiedene Variablen vor, so gibt es eine Formel $A' \in F(\{\neg, \leftrightarrow\})$, so dass

1. $A \models\!\!\dashv A'$
2. A' enthält Negationssymbole nur direkt vor den Variablen (also z.B. $p \leftrightarrow \neg q$).
3. A' enthält höchstens $2n$ Literale (also Vorkommen von negierten oder nichtnegierten Variablen).

5. Aufgabe: [semantische Folgerung, 6P]
Zeigen oder widerlegen Sie:

1. $\{p \lor q, q \to r\} \models r$
2. $\{p \land q, \neg p \to (q \to r), q \land \neg r, \} \models q \to r$
3. $\{p, p \land q, p \to r, q \land \neg r, r \to s, (\neg q \lor r \lor \neg s) \to p\} \models (q \to r) \land (p \lor (r \to r))$
4. $\{p, p \to r, r \lor \neg q\} \models p \to (q \to p)$
5. $F \models q \to p \land (\neg(s \land \neg(s \lor ((q \land r) \to p))))$
6. $\Sigma \models p_3$, wobei Σ wie in Aufgabe **??** definiert sei.

6. Aufgabe: [Deduktionstheorem, 5P]
Zeigen Sie die folgende Variante des Deduktionstheorems:

$$\{A_1, \ldots, A_n\} \models B \text{ gdw. } (A_1 \land \ldots \land A_n) \to B \text{ eine Tautologie ist.}$$

7. Aufgabe: [Kompaktheitssatz, 5P]
Zeigen Sie, dass die folgende Menge erfüllbar ist:

$$\Sigma := \{p_i \lor p_{i+1} | i \in \mathbb{N}\} \cup \{(p_i \land p_{i+1}) \to \neg p_{i+2} | i \in \mathbb{N}\}$$

8. Aufgabe: [Kompaktheitssatz, 2P]
Sei $\Sigma \subseteq F$ eine unendliche Menge aussagenlogischer Formeln und seien $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots$ erfüllbare Teilmengen von F, so dass für jede endliche Teilmenge $\Sigma' \subseteq \Sigma$ $\Sigma' \subseteq \Sigma_i$ für ein $i > 0$ gilt. Ist Σ erfüllbar? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

9. Aufgabe: [Substitution, 4P]
Seien $A, B, C \in F$. Ferner sei $A \models\!\!\!\!=\!\!\!\!\!\dashv B$ und A eine Teilformel von C.

Beweisen Sie: Entsteht C' aus C durch Ersetzen ein oder mehrerer Vorkommen von A durch B, so gilt $C \models\!\!\!\!=\!\!\!\!\!\dashv C'$.

10. Aufgabe: [vollständige Operatorenmengen, 6P]

1. Zeigen Sie, dass $\{\neg \to\}$ eine vollständige Operatorenmenge ist.
2. Zeigen Sie, dass $\{\neg, \leftrightarrow\}$ *keine* vollständige Operatorenmenge ist.

11. Aufgabe: [Tacker, 1P]
Formalisieren Sie die folgende Aussage: Wenn eine Übungsabgabe weder getackert noch mit einer Büroklammer versehen ist, kann es sein, dass es keine Punkte dafür gibt.

Achtung: Die Aussage ist eine Tautologie!

Abgabe: bis 04. Mai 2011 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34-401.4