SS 2011 4. Mai 2011

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 3

Prof. Dr. Klaus Madlener Abgabe bis 11. Mai 2011 10:00 Uhr

1. Aufgabe: [syntaktischer Nachweis von Tautologien, Übung]

Gegeben seien die folgenden Regelschemata:

1. $\frac{A \vee \neg A}{true}$
2. $\frac{A \vee true}{true}$
3. $\frac{A \to \neg A}{\neg A}$
4. $\frac{(A \vee B) \vee C}{A \vee (B \vee C)}$
5. $\frac{A \vee B}{B \vee A}$
6. $\frac{A \to B}{\neg A \vee B}$

Dabei sei $true$ eine aussagenlogische Konstante mit $\varphi(true) = 1$ für jede Bewertung φ.

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind, indem Sie mit Hilfe der obigen Regelschemata jeweils $A \vdash true$ herleiten.

1. $A_1 \equiv (B \vee A) \vee (C \to \neg B)$
2. $A_2 \equiv p \to (q \to (p \to q))$

2. Aufgabe: [Beweise in deduktiven Systemen, Übung]

Zeigen Sie:

1. $\neg(q \to p) \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg p$
2. $\vdash_{\mathcal{F}_0} \neg(p \to p) \to \neg(p \to q)$
3. $(\neg(p \to q)) \vdash_{\mathcal{F}_0} (q \to p)$

3. Aufgabe: [Beweise in $\mathcal{F}_0$, 6P]

Beweisen Sie die Aussageformen 10 und 11 aus Beispiel 1.22 in den Folien im deduktiven System $\mathcal{F}_0$.

4. Aufgabe: [Widerspruchsbeweise in $\mathcal{F}_0$, 6P]

1. Zeigen Sie ohne Verwendung semantischer Argumente, dass $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A$ genau dann gilt, wenn $\Sigma \cup \{\neg A\}$ inkonsistent ist.
2. Zeigen Sie in $\mathcal{F}_0$:

a) $q, r \to \neg q \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg r$

b) $A \to (\neg B \to C), (\neg B \to C) \to (A \to \neg B), \neg C \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg A$

5. Aufgabe: [Korrekte Regeln, 5P]

Ein Regelschema $R_0 : \dfrac{A_1, \ldots, A_n}{A}$ ist *korrekt* für die Aussagenlogik, wenn folgendes gilt: Sind die Voraussetzungen $A_1, \ldots, A_n$ Tautologien, so ist auch die Folgerung A eine Tautologie.

1. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{F} = (\mathrm{Ax}, R)$ ein deduktives System mit korrekten Axiomen (d.h. Tautologien als Axiome) und korrekten Regeln, so ist $\mathcal{F}$ korrekt.
2. Geben Sie eine korrekte Regel $\dfrac{A_1, \ldots, A_n}{A}$ mit $A_1, \ldots, A_n \not\models A$ an.
3. Geben Sie ein möglichst einfaches Deduktionssystem mit korrekten Regeln an, in dem jede Formelmenge inkonsistent ist.

6. Aufgabe: [Zusätzliche Operatoren in $\mathcal{F}_0$, 8P]

Um Formeln aus ganz F im deduktiven System $\mathcal{F}_0$ betrachten zu können, kann man weitere Axiome einführen.

1. Führen Sie weitere Axiome in $\mathcal{F}_0$ ein, die es ermöglichen, den Kalkül auch für Formeln zu verwenden, in denen die Disjunktion ($\vee$) vorkommt. Dieses erweiterte System sei mit $\mathcal{F}_0'$ bezeichnet.
2. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_0'$ immer noch korrekt ist.
3. Geben Sie eine zu $P \equiv (p \vee q) \vee r$ logisch äquivalente Formel Q aus F_0 an.
4. Zeigen Sie ohne Verwendung semantischer Argumente für Ihr Q, dass $\vdash_{\mathcal{F}_0'} P \to Q$ gilt.

Abgabe: bis 11. Mai 2011 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34-401.4

zu **Aufgabe 1:**
Beweis für A_1:

$$\begin{array}{ll}
B_1 \equiv (B \vee A) \vee (C \to \neg B) & \text{Hypothese} \\
B_2 \equiv (B \vee A) \vee (\neg C \vee \neg B) & \text{Regel 6} \\
B_3 \equiv (A \vee B) \vee (\neg C \vee \neg B) & \text{Regel 5} \\
B_4 \equiv A \vee (B \vee (\neg C \vee \neg B)) & \text{Regel 4} \\
B_5 \equiv A \vee ((\neg C \vee \neg B) \vee B) & \text{Regel 5} \\
B_6 \equiv A \vee (\neg C \vee (\neg B \vee B)) & \text{Regel 4} \\
B_7 \equiv A \vee (\neg C \vee true) & \text{Regel 1} \\
B_8 \equiv A \vee true & \text{Regel 2} \\
B_9 \equiv true & \text{Regel 2}
\end{array}$$

Beweis für A_2:

$$\begin{array}{ll}
B_1 \equiv p \to (q \to (p \to q)) & \text{Hypothese} \\
B_2 \equiv \neg p \vee (q \to (p \to q)) & \text{Regel 6} \\
B_3 \equiv \neg p \vee (\neg q \vee (p \to q)) & \text{Regel 6} \\
B_4 \equiv \neg p \vee (\neg q \vee (\neg p \vee q)) & \text{Regel 6} \\
B_5 \equiv \neg p \vee ((\neg p \vee q) \vee \neg q) & \text{Regel 5} \\
B_6 \equiv \neg p \vee (\neg p \vee (q \vee \neg q)) & \text{Regel 4} \\
B_7 \equiv \neg p \vee (\neg p \vee true) & \text{Regel 1} \\
B_8 \equiv \neg p \vee true & \text{Regel 2} \\
B_9 \equiv true & \text{Regel 2}
\end{array}$$

zu **Aufgabe 2:**

1. $\neg(q \to p) \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg p$
   Nach Deduktionstheorem genügt es, $\vdash_{\mathcal{F}_0} \neg(q \to p) \to \neg p$ zu zeigen.

$$\begin{array}{lll}
A_1 \equiv & p \to (q \to p) & \text{Ax1} \\
A_2 \equiv & (p \to (q \to p)) \to (\neg(q \to p) \to \neg p) & \text{Theorem 8} \\
A_3 \equiv & \neg(q \to p) \to \neg p & \text{MP}(A_1, A_2)
\end{array}$$

2. $\vdash_{\mathcal{F}_0} \neg(p \to p) \to \neg(p \to q)$

$$\begin{array}{lll}
A_1 \equiv & \neg(p \to p) & \text{Prämisse} \\
A_2 \equiv & p \to (q \to p) & \text{Ax1} \\
A_3 \equiv & (p \to (q \to p)) \to ((p \to q) \to (p \to p)) & \text{Ax2} \\
A_4 \equiv & (p \to q) \to (p \to p) & \text{MP}(A_2, A_3) \\
A_5 \equiv & ((p \to q) \to (p \to p)) \to (\neg(p \to p) \to \neg(p \to q)) & \text{Ax3} \\
A_6 \equiv & \neg(p \to p) \to \neg(p \to q) & \text{MP}(A_4, A_5) \\
A_7 \equiv & \neg(p \to q) & \text{MP}(A_1, A_6)
\end{array}$$

3. $(\neg(p \to q)) \vdash_{\mathcal{F}_0} (q \to p)$:
   Wir führen einen Widerspruchsbeweis und zeigen, dass die Menge $\neg(p \to q), q, \neg p$

inkonsistent ist (vgl. Aufgabe 4).

$A_1 \equiv$	$\neg p$	Prämisse
$A_2 \equiv$	$\neg p \to (p \to q)$	Theorem 6
$A_3 \equiv$	$p \to q$	MP(A_1, A_2)
$A_4 \equiv$	$\neg(p \to q)$	Prämisse

zu **Aufgabe 3:**

10. $\vdash_{\mathcal{F}_0} (B \to A) \to ((\neg B \to A) \to A)$ (zeige $B \to A,\ \neg B \to A \vdash_{\mathcal{F}_0} A$)

$B_1 \equiv B \to A$	Hypothese
$B_2 \equiv \neg B \to A$	Hypothese
$B_3 \equiv (B \to A) \to (\neg A \to \neg B)$	Theorem (s. 8.)
$B_4 \equiv \neg A \to \neg B$	MP(B_1, B_3)
$B_5 \equiv (\neg B \to A) \to (\neg A \to \neg\neg B)$	Theorem (s. 8.)
$B_6 \equiv \neg A \to \neg\neg B$	MP(B_2, B_5)
$B_7 \equiv \neg\neg B \to (\neg B \to \neg(B \to A))$	Theorem (s. 6.)
$B_8 \equiv (\neg A \to \neg\neg B) \to$ $((\neg\neg B \to (\neg B \to \neg(B \to A)))$ $\to (\neg A \to (\neg B \to \neg(B \to A))))$	Theorem (s. 4.)
$B_9 \equiv (\neg\neg B \to (\neg B \to \neg(B \to A)))$ $\to (\neg A \to (\neg B \to \neg(B \to A)))$	MP(B_6, B_8)
$B_{10} \equiv \neg A \to (\neg B \to \neg(B \to A))$	MP(B_7, B_9)
$B_{11} \equiv (\neg A \to (\neg B \to \neg(B \to A))) \to$ $((\neg A \to \neg B) \to (\neg A \to \neg(B \to A)))$	Ax2
$B_{12} \equiv (\neg A \to \neg B) \to (\neg A \to \neg(B \to A))$	MP(B_{10}, B_{11})
$B_{13} \equiv \neg A \to \neg(B \to A)$	MP(B_4, B_{11})
$B_{14} \equiv (\neg A \to \neg(B \to A)) \to ((B \to A) \to A)$	Ax3
$B_{15} \equiv (B \to A) \to A$	MP(B_{13}, B_{14})
$B_{16} \equiv A$	MP(B_1, B_{15})

11. $\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ (zeige $A \to B,\ A \to \neg B \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg A$)

$B_1 \equiv A \to B$	Hypothese
$B_2 \equiv A \to \neg B$	Hypothese
$B_3 \equiv (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	Theorem (siehe 8.)
$B_4 \equiv \neg B \to \neg A$	MP(B_1, B_3)
$B_5 \equiv (A \to \neg B) \to (\neg\neg B \to \neg A)$	Theorem (siehe 8.)
$B_6 \equiv \neg\neg B \to \neg A$	MP(B_2, B_5)
$B_7 \equiv (\neg B \to \neg A) \to ((\neg\neg B \to \neg A) \to \neg A)$	Theorem (siehe 10.)
$B_8 \equiv (\neg\neg B \to \neg A) \to \neg A$	MP(B_4, B_7)
$B_9 \equiv \neg A$	MP(B_6, B_8)

zu **Aufgabe 4:**

1. Zu zeigen: $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A$ gdw. $\Sigma \cup \{\neg A\}$ inkonsistent: Die Hinrichtung ist klar: Wenn $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A$ gilt, dann gilt auch $\Sigma \cup \{\neg A\} \vdash_{\mathcal{F}_0} A$ woraus sofort die Inkosistenz folgt.

   Zur Rückrichtung: Sei $\Sigma \cup \{\neg A\}$ inkonsistent. Dann gibt es eine formel B, so dass

   $$\Sigma \cup \{\neg A\} \vdash_{\mathcal{F}_0} B, \neg B$$

   gilt, wobei die Schreibweise hier bedeutet, dass beide Formeln aus der Menge gefolgert werden können. Wendet man nun das Deduktionstheorem an, so folgt

   $$\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg A \to B, \neg A \to \neg B.$$

   Wir können nun den folgenden abgekürzten Beweis für $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A$ angeben:

$B_1 \equiv \neg A \to B$	Hypothese
$B_2 \equiv \neg A \to \neg B$	Hypothese
$B_3 \equiv (\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to \neg\neg A)$	Theorem 11
$B_4 \equiv (\neg A \to \neg B) \to \neg\neg A$	MP(1,3)
$B_5 \equiv \neg\neg A$	MP(2,4)
$B_6 \equiv \neg\neg A \to A$	Theorem 3
$B_7 \equiv A$	MP(5,6)

2. Beweise in $\mathcal{F}_0$: Wir zeigen beide Aussagen durch Widerspruchsbeweise, indem wir das obige Ergebnis anwenden.

   a) $\{q, r \to \neg q \neg\neg r\}$ ist inkonsistent:

$B_1 \equiv \neg\neg r$	Hypothese
$B_2 \equiv \neg\neg r \to r$	Theorem 3
$B_3 \equiv r$	MP(1,2)
$B_4 \equiv r \to \neg q$	Hypothese
$B_5 \equiv \neg q$	MP(3,4)
$B_6 \equiv q$	Hypothese

   b) $\{A \to (\neg B \to C), (\neg B \to C) \to (A \to \neg B), \neg C \neg\neg A\}$ ist inkonsistent:

$B_1 \equiv \neg\neg A$	Hypothese
$B_2 \equiv \neg\neg A \to A$	Theorem 3
$B_3 \equiv A$	MP(2,3)
$B_4 \equiv A \to (\neg B \to C)$	Hypothese
$B_5 \equiv \neg B \to C$	MP(3,4)
$B_6 \equiv (\neg B \to C) \to (A \to \neg B)$	Hypothese
$B_7 \equiv A \to \neg B$	MP(5,6)
$B_8 \equiv \neg B$	MP(3,7)
$B_9 \equiv C$	MP(8,5)
$B_10 \equiv \neg C$	Hypothese

zu **Aufgabe 5:**

1. Der Beweis erfolgt durch Induktion über die Ableitungslänge l in $\mathcal{F}$.

   Induktionsanfang: A lässt sich in $\mathcal{F}$ in einem Schritt ableiten. Dann ist A ein Axiom, also nach Voraussetzung eine Tautologie.

   Induktionsschritt: A lasse sich in $\mathcal{F}$ in n Schritten ableiten und alle Aussageformen die in weniger als n Schritten ableitbar sind, seien Tautologien (**IV**).

   Ist A auch in weniger als n Schritten ableitbar, so ist A nach Induktionsvoraussetzung eine Tautologie. Sei also A nicht in weniger als n Schritten ableitbar. Dann entsteht (im letzten Ableitungsschritt) A durch Anwenden einer Regel $\frac{A_1,\ldots,A_n}{A} \in R$. Die Prämissen $A_1,\ldots,A_n$ sind in weniger als n Schritten ableitbar, also nach Induktionsvoraussetzung Tautologien. Da die Regel $\frac{A_1,\ldots,A_n}{A}$ korrekt ist, ist auch A eine Tautologie.

   In $\mathcal{F}$ sind also nur Tautologien ableitbar. D.h. $\mathcal{F}$ ist korrekt.

2. Korrekte Regel $\frac{A_1,\ldots,A_n}{A}$ mit $A_1,\ldots,A_n \not\models A$:

   $$\frac{p}{q}$$

   Beachte: Dabei sind p und q wirklich aussagenlogische Variablen und stehen nicht für beliebige Formeln. Damit ist dies nur eine Regel und kein Regelschema. Diese Regel ist korrekt, denn p ist keine Tautologie und q muss daher auch keine sein.

3. Das einfachste System, in dem jede Formelmenge inkonsistent ist, besteht nur aus dem Axiomenschema A und hat gar keine Regeln. So kann jede Formel aus jeder Menge hergeleitet werden.

zu **Aufgabe 6:**

1. Axiome für Disjunktion:

   $$\begin{aligned} (A \vee B) &\to (\neg A \to B) && \text{Ax4} \\ (\neg A \to B) &\to (A \vee B) && \text{Ax5} \end{aligned}$$

2. Korrektheit von $\mathcal{F}_0'$: Nach Aufgabe 5 genügt es zu zeigen, dass die Regel korrekt ist und dass die Axiome Tautologien sind. Für die Axiome 1-3 ist dies aus der Vorlesung bekannt und für 4 und 5 kann man leicht mit einer Wertetabelle zeigen, dass $A \vee B \models\!\!\dashv \neg A \to B$ gilt. (vgl. auch Folien 33f.)

   Für die Modus-Ponens-Regel gilt laut Folie 29 $\{A, A \to B\} \models B$. D.h. jede Bewertung, die A und $A \to B$ erfüllt, erfüllt auch B. Insbesondere muss dann auch gelten: Sind A und $A \to B$ Tautologien, so ist B auch eine Tautologie.

3. Eine zu $P \equiv (p \vee q) \vee r$ logisch äquivalente Formel Q: $\neg(\neg p \to q) \to r$.

4. Zu zeigen: $\vdash_{\mathcal{F}_0'} P \to Q$: Wendet man zwei mal das Deduktionstheorem sowie Aufgabe 4 an, so bleibt zu zeigen, dass $\{(p \vee q) \vee r, \neg(\neg p \to q), \neg r\}$ inkonsistent ist (Widerspruchsbeweis):

$B_1 \equiv (p \vee q) \vee r$	Hypothese
$B_2 \equiv ((p \vee q) \vee r) \to (\neg(p \vee q) \to r)$	Ax4
$B_3 \equiv \neg(p \vee q) \to r$	MP(1,2)
$B_4 \equiv (\neg(p \vee q) \to r) \to (\neg r \to \neg\neg(p \vee q))$	Theorem 8
$B_5 \equiv \neg r \to \neg\neg(p \vee q)$	MP(3,4)
$B_6 \equiv \neg r$	Hypothese
$B_7 \equiv \neg\neg(p \vee q)$	MP(6,5)
$B_8 \equiv \neg\neg(p \vee q) \to (p \vee q)$	Theorem 3
$B_9 \equiv p \vee q$	MP(7,8)
$B_{10} \equiv (p \vee q) \to \neg p \to q$	Ax5
$B_1 1 \equiv \neg p \to q$	MP(9,10)
$B_1 2 \equiv \neg(\neg p \to q)$	Hypothese

$B_1 2$ ist die Negation von $B_1 1$, womit gezeigt ist, dass die Menge inkonsistent ist.