SS 2011 4. Mai 2011

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 3

Prof. Dr. Klaus Madlener Abgabe bis 11. Mai 2011 10:00 Uhr

1. Aufgabe: [syntaktischer Nachweis von Tautologien, Übung]
Gegeben seien die folgenden Regelschemata:

1. $\frac{A \vee \neg A}{true}$
2. $\frac{A \vee true}{true}$
3. $\frac{A \to \neg A}{\neg A}$
4. $\frac{(A \vee B) \vee C}{A \vee (B \vee C)}$
5. $\frac{A \vee B}{B \vee A}$
6. $\frac{A \to B}{\neg A \vee B}$

Dabei sei $true$ eine aussagenlogische Konstante mit $\varphi(true) = 1$ für jede Bewertung φ.
Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind, indem Sie mit Hilfe der obigen Regelschemata jeweils $A \vdash true$ herleiten.

1. $A_1 \equiv (B \vee A) \vee (C \to \neg B)$
2. $A_2 \equiv p \to (q \to (p \to q))$

2. Aufgabe: [Beweise in deduktiven Systemen, Übung]
Zeigen Sie:

1. $\neg(q \to p) \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg p$
2. $\vdash_{\mathcal{F}_0} \neg(p \to p) \to \neg(p \to q)$
3. $(\neg(p \to q)) \vdash_{\mathcal{F}_0} (q \to p)$

3. Aufgabe: [Beweise in $\mathcal{F}_0$, 6P]
Beweisen Sie die Aussageformen 10 und 11 aus Beispiel 1.22 in den Folien im deduktiven System $\mathcal{F}_0$.

4. Aufgabe: [Widerspruchsbeweise in $\mathcal{F}_0$, 6P]

1. Zeigen Sie ohne Verwendung semantischer Argumente, dass $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A$ genau dann gilt, wenn $\Sigma \cup \{\neg A\}$ inkonsistent ist.
2. Zeigen Sie in $\mathcal{F}_0$:

a) $q, r \to \neg q \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg r$

b) $A \to (\neg B \to C), (\neg B \to C) \to (A \to \neg B), \neg C \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg A$

5. Aufgabe: [Korrekte Regeln, 5P]

Ein Regelschema $R_0 : \dfrac{A_1, \ldots, A_n}{A}$ ist *korrekt* für die Aussagenlogik, wenn folgendes gilt: Sind die Voraussetzungen $A_1, \ldots, A_n$ Tautologien, so ist auch die Folgerung A eine Tautologie.

1. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{F} = (\mathrm{Ax}, R)$ ein deduktives System mit korrekten Axiomen (d.h. Tautologien als Axiome) und korrekten Regeln, so ist $\mathcal{F}$ korrekt.
2. Geben Sie eine korrekte Regel $\dfrac{A_1, \ldots, A_n}{A}$ mit $A_1, \ldots, A_n \not\models A$ an.
3. Geben Sie ein möglichst einfaches Deduktionssystem mit korrekten Regeln an, in dem jede Formelmenge inkonsistent ist.

6. Aufgabe: [Zusätzliche Operatoren in $\mathcal{F}_0$, 8P]

Um Formeln aus ganz F im deduktiven System $\mathcal{F}_0$ betrachten zu können, kann man weitere Axiome einführen.

1. Führen Sie weitere Axiome in $\mathcal{F}_0$ ein, die es ermöglichen, den Kalkül auch für Formeln zu verwenden, in denen die Disjunktion ($\vee$) vorkommt. Dieses erweiterte System sei mit $\mathcal{F}_0'$ bezeichnet.
2. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_0'$ immer noch korrekt ist.
3. Geben Sie eine zu $P \equiv (p \vee q) \vee r$ logisch äquivalente Formel Q aus F_0 an.
4. Zeigen Sie ohne Verwendung semantischer Argumente für Ihr Q, dass $\vdash_{\mathcal{F}_0'} P \to Q$ gilt.

Abgabe: bis 11. Mai 2011 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34-401.4