SS 2011 11. Mai 2011

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 4

Prof. Dr. Klaus Madlener Abgabe bis 18. Mai 2011 10:00 Uhr

1. Aufgabe: [Deduktive Systeme, Übung]
Das deduktive System $\hat{\mathcal{F}}$ entstehe aus $\mathcal{F}_0$ durch Ändern des ersten Axiomenschemas in

$$A \rightarrow (A \rightarrow B).$$

1. Ist $\hat{\mathcal{F}}$ vollständig?
2. Ist $\hat{\mathcal{F}}$ korrekt?

2. Aufgabe: [Beweise in deduktiven Systemen, Übung]
Zeigen Sie:

1. $(\neg(p \rightarrow q)) \vdash_G (q \rightarrow p)$
2. $(\neg(p \rightarrow q)) \vdash_H (q \rightarrow p)$
3. $\vdash_G (p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)$
4. $\vdash_H (p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)$

3. Aufgabe: [Korrektheit des Gentzen-Sequenzenkalküls, 4P]
Zeigen Sie, dass der Sequenzenkalkül korrekt ist, d.h.

$$\text{aus } \Gamma \vdash_G \Delta \text{ folgt } \Gamma \models \Delta.$$

4. Aufgabe: [Vollständigkeit des Hilbert-Kalküls, 8P]
Zeigen Sie, dass der Hilbert-Kalkül vollständig ist.

Falls Sie Regeln benutzen, die auf den Folien 70f nicht ausdrücklich angegeben wurden, definieren Sie sie bitte selbst und argumentieren Sie kurz, weshalb die Regeln korrekt sind.

5. Aufgabe: [Beweise in deduktiven Systemen, 8P]
Zeigen Sie:

1. $\vdash_G (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
2. $A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C \vdash_G B \vee D$
3. $\vdash_G \neg(A \vee B) \vee B \vee A$
4. $A \wedge B, B \wedge C \vdash_G A \wedge C$

Abgabe: bis 18. Mai 2011 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34-401.4

zu **Aufgabe 1:**

1. $\hat{\mathcal{F}}$ ist vollständig.

   Sei $A \in F_0$.

$B_1 \equiv B \to (B \to C)$	Ax1$'$
$B_2 \equiv (B \to (B \to C) \to ((B \to (B \to C)) \to A)$	Ax1$'$
$B_3 \equiv (B \to (B \to C)) \to A$	MP(B_1, B_2)
$B_4 \equiv A$	MP(B_1, B_3)

   Also gilt $\vdash_{\hat{\mathcal{F}}} A$ für jedes $A \in F_0$. Insbesondere sind alle Tautologien herleitbar.

2. $\hat{\mathcal{F}}$ ist nicht korrekt.

   Wir haben in 1. nicht ausgenutzt, dass A Tautologie ist und es lassen sich auch nicht nur Tautologien herleiten. Z.B. lässt sich jede Formel der Form $A \to (A \to B)$ herleiten.

zu **Aufgabe 2:**

1. $(\neg(p \to q)) \vdash (q \to p)$

   im Sequenzenkalkül:

$A_1 \equiv$	$p, q \vdash_G q, p$	Ax1
$A_2 \equiv$	$p \vdash_G q, q \to p$	$R_\to$,1
$A_3 \equiv$	$\emptyset \vdash_G p \to q, q \to p$	$R_\to$,1
$A_4 \equiv$	$\neg(p \to q) \vdash_G q \to p$	$R_\to$,2

   im Hilbertkalkül:

$A_1 \equiv$	$\neg(p \to q)$	Prämisse
$A_2 \equiv$	$\neg(\neg p \vee q)$	Implikationsgesetz
$A_3 \equiv$	$\neg\neg p \wedge q$	De Morgan
$A_4 \equiv$	$p \wedge \neg q$	Negationsgesetz
$A_5 \equiv$	$\neg q$	$\wedge$-Elimination
$A_6 \equiv$	$\neg q \vee p$	$\vee$-Einführung
$A_7 \equiv$	$q \to p$	Implikationsgesetz

2. $\vdash (p \wedge q) \to (p \vee r)$

   im Sequenzenkalkül:

$A_1 \equiv$	$p, q \vdash_G p, r$	Ax1
$A_2 \equiv$	$p, q \vdash_G p \vee r$	$R_\vee$
$A_3 \equiv$	$p \wedge q \vdash_G p \vee r$	$R_\wedge$
$A_4 \equiv$	$\vdash_G (p \wedge q) \to (p \vee r)$	$R_\to$,1

im Hilbertkalkül:

$$\begin{array}{lll} A_1 \equiv & p \wedge q & \text{Prämisse} \\ A_2 \equiv & p & \wedge\text{-Elimination} \\ A_3 \equiv & p \vee r & \vee\text{-Einführung} \\ A_4 \equiv & p \wedge q \vdash_H p \vee r & \text{Mit Deduktionstheorem aus } A_1 \text{ und } A_3. \end{array}$$

zu **Aufgabe 3:**
Nach Aufgabe **??** genügt es zu zeigen, dass alle Regeln des Gentzen-Sequenzenkalküls korrekt sind und dass alle Axiome ebenfalls korrekt, also Tautologien sind. Dies soll hier beispielhaft für einem Axiom und eine Regel geschehen. In Bemerkung 1.27 auf Folie 66 wird erwähnt, dass Aussageformen der Art $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash_G \{B_1, \ldots, B_m\}$ als $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to (B_1 \vee \ldots \vee B_m)$ interpretiert werden können.

Axiom 1: Um die Korrektheit von Axiom 1 zu zeigen, also $\Gamma, A \vdash_G A, \Delta$, muss bspw. gezeigt werden, dass $\wedge(\Gamma \cup \{A\}) \to \vee(\{A\} \cup \Delta)$ eine Tautologie ist, also für jede Bewertung gilt. Sei φ eine Bewertung, so dass $\varphi(\wedge(\Gamma \cup \{A\})) = 1$, dann muss insbesondere $\varphi(A) = 1$ sein. Damit gilt auch $\varphi(\vee(\{A\} \cup \Delta)) = 1$ und es ist gezeigt, dass $\wedge(\Gamma \cup \{A\}) \to \vee(\{A\} \cup \Delta)$ eine Tautologie ist, also dass $\Gamma, A \vdash_G A, \Delta$ korrekt ist.

Regel R_{to}, zweiter Teil: Seien $\Gamma \vdash_G A, \Delta$ und $\Gamma, B \vdash_G \Delta$. Das heißt, für alle Bewertungen φ mit $\varphi(\wedge(\Gamma)) = 1$ gilt nach der ersten Voraussetzung, dass $\varphi(A) = 1$ oder $\varphi(\vee(\Delta)) = 1$, und für alle Bewertungen φ mit $\varphi(B) = 1$ und $\varphi(\wedge(\Gamma)) = 1$ gilt nach der zweiten Voraussetzung, dass $\varphi(\vee(\Gamma)) = 1$.

Nun gilt für alle Bewertungen ψ mit $\psi(A \to B) = 1$ und $\psi(\wedge(\Gamma)) = 1$, dass $\psi(A) = 0$ oder $\psi(B) = 1$. Falls $\psi(A) = 0$, dann muss wegen der ersten Voraussetzung, falls $\psi(B) = 1$, dann wegen der zweiten Voraussetzung $\psi(\vee(\Delta)) = 1$ gelten.

zu **Aufgabe 4:**
Wir zeigen die Vollständigkeit des Hilbert-Kalküls, indem wir beweisen, dass man mit Hilfe des Hilbert-Kalküls das System $\mathcal{F}_0$ simulieren kann. Dazu zeigen wir, dass die Axiome von $\mathcal{F}_0$ im Hilbertkalkül herleitbar sind und dass die Regel simuliert werden kann. Zuletzt muss dann noch gezeigt werden, wie man Beweise für Formeln führt, die nicht nur $\neg$ und $\to$ enthalten.

Zunächst zu den Axiomen:

Axiom 1: Offensichtlich gilt $A, B \vdash_H A$. Wendet man darauf zwei mal das Deduktionstheorem an, so ergibt sich $A \to (B \to A)$.

Axiom 2: Wir zeigen $A \to (B \to C), A \to B, A \vdash_H C$. Hierauf muss drei mal das Deduktionstheorem angewendet werden, um $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to$

$(A \rightarrow C))$ zu erhalten. Der Beweis:

$$\begin{array}{lll} A_1 \equiv & A \rightarrow (B \rightarrow C) & \text{Prämisse} \\ A_2 \equiv & A \rightarrow B & \text{Prämisse} \\ A_3 \equiv & A & \text{Prämisse} \\ A_4 \equiv & B \rightarrow C & \text{Modus-Ponens } (A_3,\ A_1) \\ A_5 \equiv & A \rightarrow C & \text{Hyp. Syllogismus} \\ A_6 \equiv & C & \text{Modus-Ponens } (A_3,\ A_5) \end{array}$$

Axiom 3: Wir zeigen $\neg A \rightarrow \neg B, B \vdash_H A$. Mit 2x Deduktionstheorem folgt dann $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$. Der Beweis:

$$\begin{array}{lll} A_1 \equiv & \neg A \rightarrow \neg B & \text{Prämisse} \\ A_2 \equiv & B & \text{Prämisse} \\ A_3 \equiv & \neg\neg B & \text{Doppelnegation} \\ A_4 \equiv & \neg\neg A & \text{Modus-Tollens } (A_1,\ A_3) \\ A_5 \equiv & A & \text{Doppelnegation} \end{array}$$

Man beachte, dass wir hier die Doppelnegationsregel in beide Richtungen angewendet haben. Dies geht natürlich nicht immer, ist in diesem Fall aber korrekt, weil es sich ja um eine Äquivalenztransformation handelt. Dies fällt unter die „üblichen“Regeln, die laut Folie 71 zum Hilbertkalkül hinzukommen. Im Allgemeinen kann man sich aber nicht beliebige Äquivalenzumformungen als Regeln hinzudefinieren, da dies dem Sinn eines Kalküls widersprechen würde. Schließlich sind alle Tautologien logisch äquivalent. Solche Zusatzregeln müssen sich auf die bekannten elementaren Äquivalenzen beschränken.

Um nun einen Beweis für eine beliebige Tautologie zu führen, kann man nun zuerst eine äquivalente Formel aus F_0 herleiten und dann elementare Umformungsregeln benutzen, um die eigentliche Formel zu erzeugen. Um bspw. eine Tautologie der Form $A \wedge B$ herzuleiten, könnte man also zuerst $\neg(A \rightarrow \neg B)$ herleiten und dies dann in einem Schritt nach $A \wedge B$ transformieren. Die entsprechende Regel ist korrekt, da es sich hier um eine Äquivalenztransformation handelt. Analog zeigt man $A \vee B$, indem man $\neg A \rightarrow B$ herleitet und $A \leftrightarrow B$, indem man $A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A$ herleitet.

zu **Aufgabe 5:**

1. $\vdash_G (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$$
\begin{array}{lll}
A_1 \equiv & B, A \vdash_G C, B & \text{Ax1} \\
A_2 \equiv & C, B, A \vdash_G C & \text{Ax1} \\
A_3 \equiv & B \to C, A \vdash_G A, C & \text{Ax1} \\
A_4 \equiv & B \to C, B, A \vdash_G C & R_{\to 2}(A_1, A_2) \\
A_5 \equiv & A \to B, A \vdash_G A, C & \text{Ax1} \\
A_6 \equiv & B \to C, A \to B, A \vdash_G C & R_{\to 2}(A_3, A_4) \\
A_7 \equiv & A \to (B \to C), A \to B, A \vdash_G C & R_{\to 2}(A_5, A_6) \\
A_8 \equiv & A \to (B \to C), A \to B \vdash_G A \to C & R_{\to 1}(A_7) \\
A_9 \equiv & A \to (B \to C) \vdash_G (A \to B) \to (A \to C) & R_{\to 1}(A_8) \\
A_{10} \equiv & \vdash_G (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) & R_{\to 1}(A_9)
\end{array}
$$

2. $A \to B, C \to D, A \vee C \vdash_G B \vee D$

$$
\begin{array}{lll}
A_1 \equiv & B, A \vdash_G C, B, D & \text{Ax1} \\
A_2 \equiv & A \vdash_G C, B \vee D, A & \text{Ax1} \\
A_3 \equiv & B, A \vdash_G C, B \vee D & R_{\vee}(A_1) \\
A_4 \equiv & A \to B, D, A \vdash_G B, D & \text{Ax1} \\
A_5 \equiv & A \to B, A \vdash_G C, B \vee D & R_{\to 2}(A_2, A_3) \\
A_6 \equiv & A \to B, D, A \vdash_G B \vee D & R_{\vee}(A_4) \\
A_7 \equiv & B, C \to D, A \vdash_G B, D & \text{Ax1} \\
A_8 \equiv & C \to D, A \vdash_G A, B \vee D & \text{Ax1} \\
A_9 \equiv & B, C \to D, A \vdash_G B \vee D & R_{\vee}(A_7) \\
A_{10} \equiv & A \to B, C \to D, C \vdash_G B \vee D & R_{\to 2}(A_5, A_6) \\
A_{11} \equiv & A \to B, C \to D, A \vdash_G B \vee D & R_{\to 2}(A_8, A_9) \\
A_{12} \equiv & A \to B, C \to D, A \vee C \vdash_G B \vee D & R_{\vee\prime}(A_{10}, A_{11})
\end{array}
$$

3. $\vdash_G \neg(A \vee B) \vee B \vee A$

$$
\begin{array}{lll}
A_1 \equiv & A \vdash_G B, A & \text{Ax1} \\
A_2 \equiv & B \vdash_G B, A & \text{Ax1} \\
A_3 \equiv & A \vee B \vdash_G B, A & R_{\vee\prime}(A_1, A_2) \\
A_4 \equiv & \vdash_G \neg(A \vee B), B, A & R_{\neg 1}(A_3) \\
A_5 \equiv & \vdash_G \neg(A \vee B) \vee B, A & R_{\vee}(A_4) \\
A_6 \equiv & \vdash_G \neg(A \vee B) \vee B \vee A & R_{\vee}(A_5)
\end{array}
$$

4. $A \wedge B, B \wedge C \vdash_G A \wedge C$

$$
\begin{array}{lll}
A_1 \equiv & A, B, B \wedge C \vdash_G A & \text{Ax1} \\
A_2 \equiv & A \wedge B, B, C \vdash_G C & \text{Ax1} \\
A_3 \equiv & A \wedge B, B \wedge C \vdash_G A & R_{\wedge}(A_1) \\
A_4 \equiv & A \wedge B, B \wedge C \vdash_G C & R_{\wedge}(A_2) \\
A_5 \equiv & A \wedge B, B \wedge C \vdash_G A \wedge C & R_{\wedge\prime}(A_4)
\end{array}
$$