SS 2011 | 18. Mai 2011

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 5

Prof. Dr. Klaus Madlener | Abgabe bis 25. Mai 2011 10:00 Uhr

1. Aufgabe: [Tableaux, Übung]
Auf Blatt 1 wurde ein Diätplan durch die Aussageform

$$A \equiv (\neg B \to F) \wedge (((B \wedge F) \to \neg E) \wedge ((E \vee \neg B) \to \neg F))$$

dargestellt. Konstruieren Sie für A ein vollständiges Tableau. Welche Eigenschaften von A kann man dem Tableau ansehen? Stellen Sie mit Hilfe des Tableaux eine disjunktive Normalform für A auf.

2. Aufgabe: [Tableauxfolgerung, Übung]
Zeigen Sie:

1. $(A \wedge \neg B) \vdash_\tau \neg((\neg A) \wedge (\neg B))$
2. $(A \wedge (A \to B)) \vdash_\tau B$
3. $A \to (B \to C) \vdash_\tau (A \to B) \to (A \to C)$

3. Aufgabe: [Kompaktheitssatz, 6P]

1. Zeigen Sie, dass es für eine Menge von Formeln Σ und eine Formel A genau dann ein abgeschlossenes Tableau für $\Sigma \cup \{\neg A\}$ gibt, wenn es für eine endliche Teilmenge $\Gamma \subset \Sigma$ ein abgeschlossenes Tableau für $\Gamma \cup \{\neg A\}$ gibt.

   Hinweis: Benutzen Sie das Lemma von König, das aussagt, dass Bäume genau dann endlich sind, wenn jeder Ast endlich ist.
2. Zeigen Sie, dass der Kompaktheitssatz für die Tableauxfolgerung gilt, also dass

   $$\Sigma \vdash_\tau A \text{ gdw. es eine endliche Teilmenge } \Sigma_0 \subseteq \Sigma \text{ gibt mit } \Sigma_0 \vdash_\tau A$$

   gilt.

4. Aufgabe: [Tableauxfolgerung, 5P]
Zeigen Sie:

1. $\{p, p \vee q, p \to s, r \to q\} \vdash_\tau q \to p$
2. $\{p, p \vee q, p \to s, r \to q\} \vdash_\tau s$
3. $\vdash_\tau (\neg(p \to q) \to (q \to p))$
4. $F \vdash_\tau q \to p \wedge (\neg(s \wedge \neg(s \vee ((q \wedge r) \to p))))$

5. $\neg((A \to (A \vee C)) \wedge D) \vdash_{\mathcal{T}} (C \to B) \vee \neg D$

5. Aufgabe: [DNF aus Tableaux, 2P]
Finden Sie mit Hilfe der Tableauxmethode disjunktive Normalformen für die folgenden Formeln:

1. $(p \to \neg(\neg q \to r)) \to (q \vee r)$
2. $(q \to p) \to \neg(r \to q)$

6. Aufgabe: [Tableaux mit Äquivalenz, 4P]
In der Vorlesung wurden die α- und β-Formeln nur für $\{\neg, \wedge, \vee, \to\}$ definiert und $\leftrightarrow$ weggelassen. Ist $A \equiv B \leftrightarrow C$ eine α- oder β-Formel und welche Komponenten hat diese Aussageform?

7. Aufgabe: [Möglichkeiten und Grenzen der Tableauxmethode, 5P]
Können die folgenden Aussagen mit der Tableauxmethode bewiesen werden? Begründen Sie Ihre Antworten.

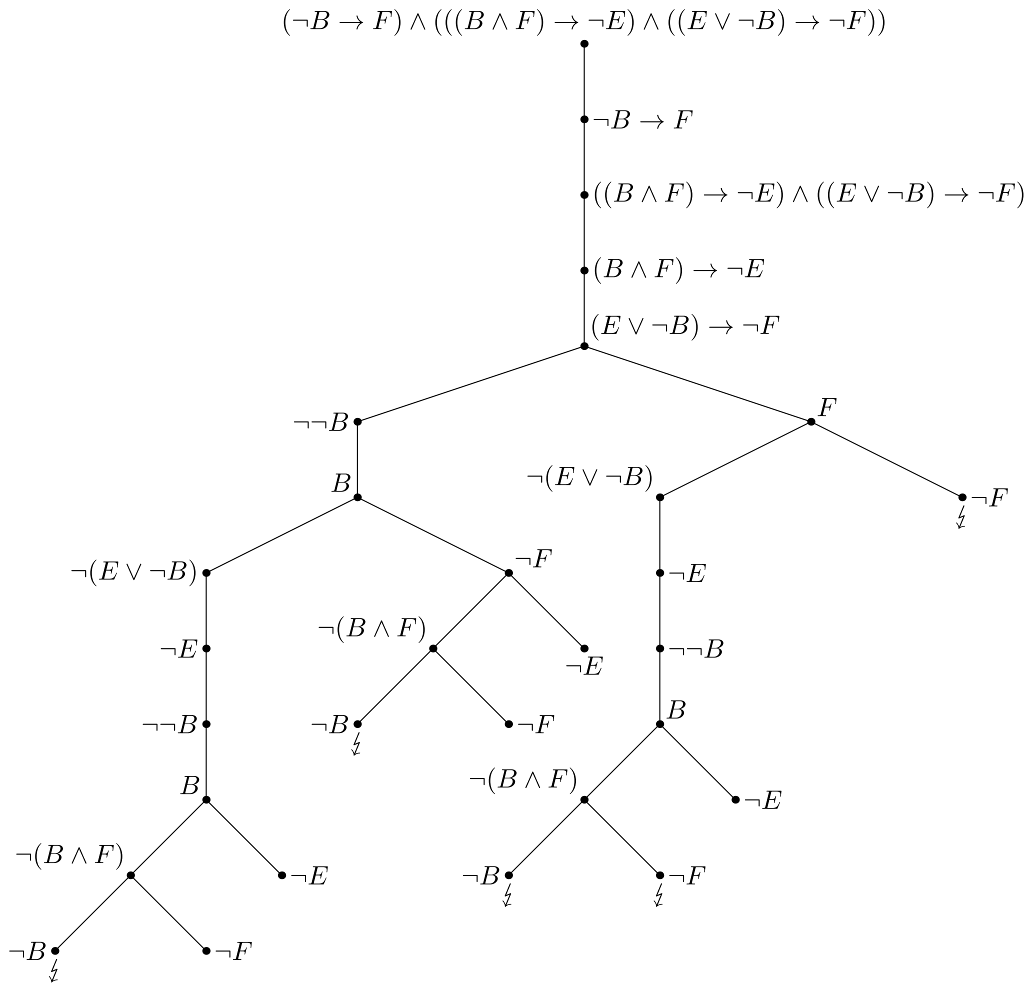
1. $\{p, q, r, s\} \models t$
2. $\{p, q, r, s\} \not\models \neg(q \to s)$
3. $F \models \neg(p \to (q \leftrightarrow r) \wedge \neg r) \to (s \vee \neg p)$
4. $\Sigma := \{p_i \wedge \neg p_{i+1} | i \in \mathbb{N}\}$ ist unerfüllbar.
5. $\Sigma := \{p_i \wedge \neg p_{i+1} | i \in 2\mathbb{N}\}$ ist erfüllbar.

Geben Sie so allgemeine Antworten wie möglich. D.h. wenn Sie z.B. erklären können, dass es einen Tableaux-Beweis gibt, ohne diesen anzugeben, dann geben Sie ihn auch nicht an.

8. Aufgabe: [Tableauxfolgerung, Übung]
Zeigen Sie ohne Verwendung der Korrektheit und Vollständigkeit der Tableaux-Folgerung: Wenn $\Sigma \vdash_{\mathcal{T}} p \wedge q$ gilt, dann gilt auch $\Sigma \vdash_{\mathcal{T}} p \vee q$.

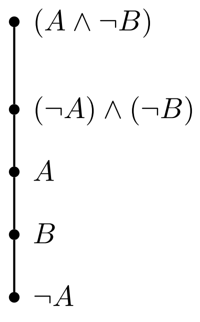
Abgabe: bis 25. Mai 2011 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34-401.4

zu **Aufgabe 1:**

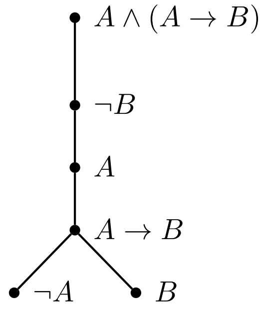


zu **Aufgabe 2:**

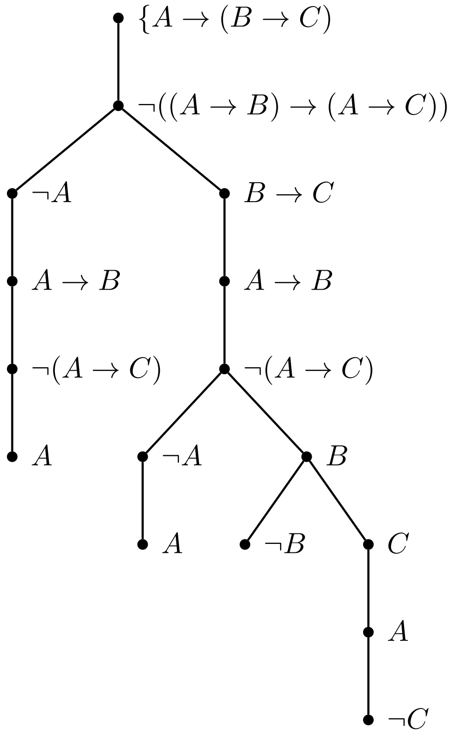
1. Zeige: $\{(A \wedge \neg B), (\neg A) \wedge (\neg B)\}$ ist widerspruchsvoll.



2. Zeige: $\{A \wedge (A \to B), \neg B\}$ ist widerspruchsvoll.



3. Zeige $\{A \to (B \to C), \neg((A \to B) \to (A \to C))$ ist widerspruchsvoll.



zu **Aufgabe 3:**

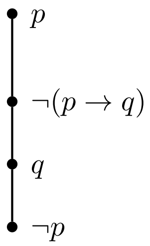
1. **$\Leftarrow$:** Sei τ ein abgeschlossenes Tableau für $\Gamma \cup \{\neg A\}$, wobei Γ eine endliche Teilmenge von Σ ist. Dann ist τ auch ein abgeschlossenes Tableau für $\Sigma \cup \{\neg A\}$.

   $\Rightarrow$: Sei τ ein abgeschlossenes Tableau für $\Sigma \cup \{\neg A\}$, dann ist jeder Ast von τ abgeschlossen, d.h. er enthält zwei konjugierte Formeln A und $\neg A$. Wähle nun für jeden Ast das kürzeste Anfangsstück, so dass zwei konjugierte Formeln enthalten sind. Diese Anfangsstücke sind endlich, weil die konjugierten Formeln tatsächlich vorkommen. Bilde aus den Anfangsstücken der Äste ein neues Tableau τ'. Nun gilt, dass jeder innere Knoten von τ' endlichen Verzweigungsgrad hat. Nach dem Lemma von König sind Bäume endlich genau dann, wenn jeder Ast endlich ist, und jeder innere Knoten endlichen Verzweigunggrad hat. Also ist τ' endlich. Daher muss es eine endliche Teilmenge Γ von Σ geben, so dass τ' Tableau für $\Gamma \cup \{A\}$ ist.

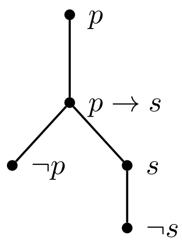
2. Kompaktheitssatz:
Nach Definition der Tablaufolgerung gilt $\Sigma \vdash_\tau A$ gdw. es für $\Sigma \cup \{\neg A\}$ ein abgeschlossenes Tableau gibt. Dies wiederum gilt nach 1., gdw. es für $\Sigma \cup \{\neg A\}$ ein abgeschlossenes Tableau gibt (Σ_0 endliche Teilmenge). Dies gilt schließlich gdw $\Sigma_0 \vdash_\tau A$.

zu **Aufgabe 4:**

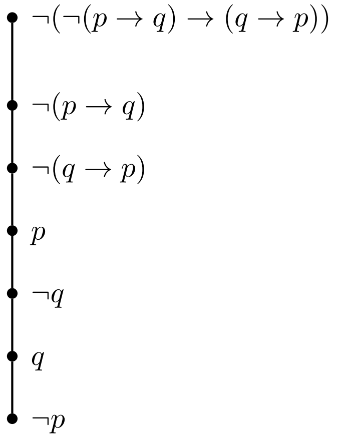
1. Zeige: $\{p, p \vee q, p \to s, r \to q\}, \neg(q \to p)$ ist widerspruchsvoll.



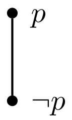
2. Zeige: $\{p, p \vee q, p \to s, r \to q, \neg s\}$ ist widerspruchsvoll.



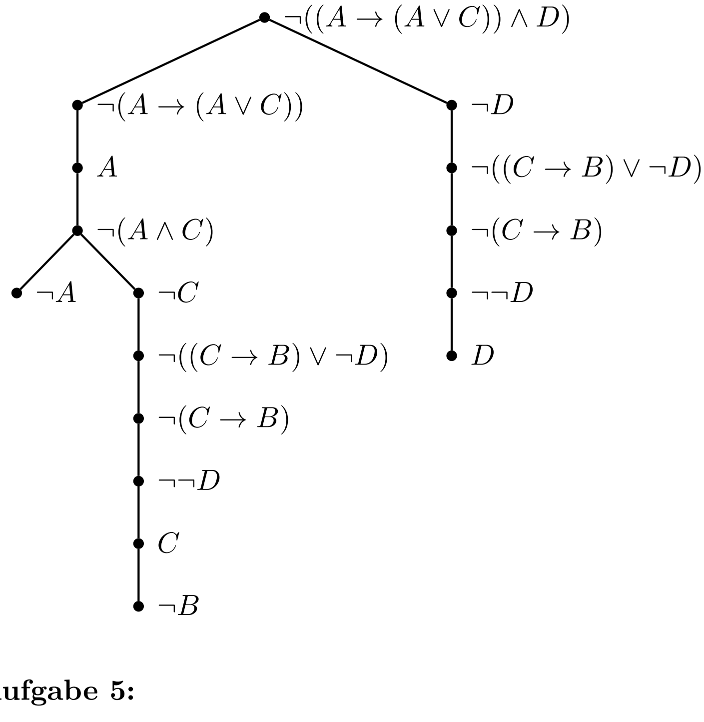
3. Zeige: $\neg(\neg(p \to q) \to (q \to p))$ ist widerspruchsvoll.



4. Zeige: $F \cup \neg(q \to p \wedge (\neg(s \wedge \neg(s \vee ((q \wedge r) \to p)))))$ ist widerspruchsvoll. Dazu reicht es zu zeigen, dass F widerspruchsvoll ist.

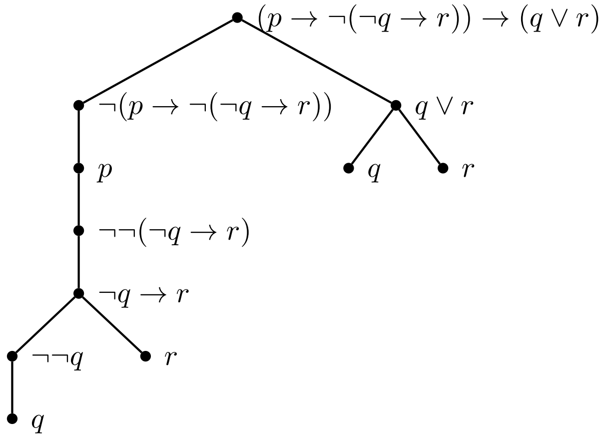


5. Zeige: $\neg((A \to (A \vee C)) \wedge D), \neg((C \to B) \vee \neg D)$ ist widerspruchsvoll.



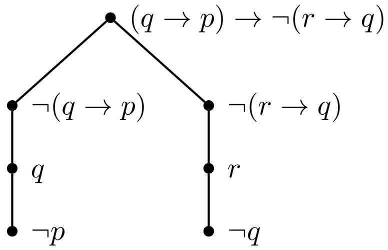
zu **Aufgabe 5:**

1. $(p \to \neg(\neg q \to r)) \to (q \vee r)$:



Jeder Ast steht für eine erfüllende Belegung. Um eine DNF zu erhalten, müssen nun also in jedem Ast die einzeln vorkommenden Literale zu Konjunktionen zusammengefasst und diese dann mit $\vee$ verknüpft werden. Die DNF lautet also $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee q \vee r$ bzw. einfacher $q \vee r$.

2. $(q \to p) \to \neg(r \to q)$:



Die DNF lautet also $(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$.

zu **Aufgabe 6:**
Wegen der logischen Äquivalenzen

$$
\begin{aligned}
A \leftrightarrow B \quad & \models\!\!\!\!\models \quad (A \to B) \wedge (B \to A) \text{ und} \\
A \leftrightarrow B \quad & \models\!\!\!\!\models \quad (A \wedge B) \vee (\neg B \wedge \neg A)
\end{aligned}
$$

kann $A \leftrightarrow B$ sowohl als α- als auch also β-Formel aufgefasst werden. Als α-Formel hat $A \leftrightarrow B$ die Komponenten $\alpha_1 = A \to B$ und $\alpha_2 = B \to A$, als β-Formel sind die Komponenten $\beta_1 = A \wedge B$ und $\beta_2 = \neg B \wedge \neg A$.

Man hat natürlich sehr viele Möglichkeiten die Komponenten von $A \leftrightarrow B$ (als α- oder β-Formel) zu definieren. Aufpassen muss man nur, dass die Tableaux-Methode mit dieser Erweiterung weiterhin (für alle endlichen Mengen) terminiert. So würde zum Beispiel die Wahl $\beta_1 = A \leftrightarrow B$ und $\beta_2 = B \to B$ zu keiner effektiven Methode führen.

Für beliebige andere Operatoren sucht man sich wie oben gesehen eine logisch äquivalente Darstellung in den gegebenen Operatoren und führt entsprechende α- oder β-Regeln ein. Am naheliegendsten erscheinen eine DNF oder eine KNF des Operators.

zu **Aufgabe 7:**

1. $\{p, q, r, s\} \models t$: Diese Aussage kann natürlich nicht gezeigt werden, da sie nicht gilt. Es kann $\{p, q, r, s\} \not\models t$ gezeigt werden, denn die Menge auf der linken Seite ist endlich, so dass die systematische Tableauxkonstruktion terminiert.
2. $\{p, q, r, s\} \not\models \neg(q \to s)$: Hier muss die Erfüllbarkeit der Menge $\{p, q, r, s(q \to s)\}$ gezeigt werden. Auch dies gelingt, da die systematische Tableauxkonstruktion immer terminiert, wenn die Menge endlich ist.
3. $F \models \neg(p \to (q \leftrightarrow r) \wedge \neg r) \to (s \vee \neg p)$ Hier muss die Unerfüllbarkeit der Menge $F \cup \{\neg(p \to (q \leftrightarrow r) \wedge \neg r) \to (s \vee \neg p)\}$ gezeigt werden. Dafür reicht es, die Unerfüllbarkeit der Menge F zu zeigen, was mit der systematischen Tableauxkonstruktion gelingt.
4. $\Sigma := \{p_i \wedge \neg p_{i+1} | i \in \mathbb{N}\}$ ist unerfüllbar: Die Aussage kann gezeigt werden, da die Konstruktion für unerfüllbare Mengen terminiert.
5. $\Sigma := \{p_i \wedge \neg p_{i+1} | i \in 2\mathbb{N}\}$ ist erfüllbar: Die Aussage kann nicht gezeigt werden, da die systematische Tableauxkonstruktion immer weiter neue Tableaux konstruiert, bis sie entweder ein abgeschlossenes Tableau findet oder keine neuen α_1-, α_2-, β_1-, β_2-Formeln (Schritte 3 bzw. 4 im Algorithmus) und auch keine neuen Formeln aus der Menge mehr einsetzen kann. Beide Fälle treten aber hier nicht ein, da τ_Σ kein abgeschlossenes Tableau enthält und Σ unendlich ist, zumindest Schritt 5 also immer wieder ausgeführt werden kann. Der Nachweis, dass τ_Σ kein abgeschlossenes Tableau enthält, kann also nicht geführt werden.

zu **Aufgabe 8:**

Zu zeigen: Gibt es ein abgeschlossenes Tableau für $\Sigma \cup \{\neg(p \wedge q)\}$, so gibt es auch eines für $\Sigma \cup \{\neg(p \vee q)\}$.

O.B.d.A. können wir annehmen, dass ein abgeschlossenes Tableau für $\Sigma \cup \{\neg(p \wedge q)\}$ die folgende Form hat: Zunächst kommen einige (endlich viele, vgl. Aufgabe 3) Formeln aus Σ und die Formel $\neg(p \wedge q)$ vor. Da $\neg(p \wedge q)$ eine β-Formel ist, folgen dann zwei Teilbäume, von denen einer $\neg p$ und der andere $\neg q$ enthält. Wir bezeichnen diese Teilbäume mit τ_1 und τ_2. Alle Äste in diesen beiden Teilbäumen sind nach Voraussetzung abgeschlossen und in jedem Ast kommt also eine der Formeln $\neg p$ bzw. $\neg q$ vor.

Ein abgschlossenes Tableau für $\Sigma \cup \{\neg(p \vee q)$ bilden wir, indem wir die selben Formeln aus Σ sowie $\neg(p \vee q)$ untereinander schreiben. Da $\neg(p \vee q)$ eine α-Formel ist, folgt nun zunächst keine Verzweigung, sondern beide Formeln $\neg p$ und $\neg q$ kommen untereinander und damit in allen Ästen des Tableaux vor. Nun hängen wir τ_1 (oder alternativ auch τ_2) an das bisherige Tableau an. An Äste, die jetzt noch offen bleiben, hängen wir untereinander p und q an.

Es muss noch gezeigt werden, dass dieses Tableau ein abgeschlossenes Tableau für $\Sigma \cup$

$\{\neg(p \vee q)\}$ ist: Wir haben schon festgestellt, dass alle Äste im ursprünglichen Tableau bzw. in τ_1 abgeschlossen sind. Es gibt drei Möglichkeiten, wie dieser Abschluss entsteht:

1. p oder $\neg\neg p$ kommen als Teilformeln im oberen Teil des Tableaux vor und werden dann in τ_1 hergeleitet.
2. Zwei völlig andere konjugierte Formeln (die nichts mit $\neg(p \wedge q)$ zu tun haben) werden in τ_1 aus Σ hergeleitet.
3. $p \wedge q$ wird in τ_1 aus Σ hergeleitet.

Im ersten Fall ist der Ast auch im neuen Tableau abgeschlossen, weil $\neg p$ in jedem Ast des neuen Tableaux vorkommt. Im zweiten Fall ist der Ast unabhängig von p und q abgeschlossen, daran ändert sich auch im neuen Tableau nichts. Im dritten Fall stellen wir zunächst fest, dass die oben beschriebene Erweiterung ein gültiges Tableau erzeugt, da $p \wedge q$ im Ast vorkommt. Außerdem ist der Ast abgeschlossen, weil $\neg p$ in jedem Ast vorkommt.