SS 2011 18. Mai 2011

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 5

Prof. Dr. Klaus Madlener Abgabe bis 25. Mai 2011 10:00 Uhr

1. Aufgabe: [Tableaux, Übung]
Auf Blatt 1 wurde ein Diätplan durch die Aussageform

$$A \equiv (\neg B \to F) \wedge (((B \wedge F) \to \neg E) \wedge ((E \vee \neg B) \to \neg F))$$

dargestellt. Konstruieren Sie für A ein vollständiges Tableau. Welche Eigenschaften von A kann man dem Tableau ansehen? Stellen Sie mit Hilfe des Tableaux eine disjunktive Normalform für A auf.

2. Aufgabe: [Tableauxfolgerung, Übung]
Zeigen Sie:

1. $(A \wedge \neg B) \vdash_\tau \neg((\neg A) \wedge (\neg B))$
2. $(A \wedge (A \to B)) \vdash_\tau B$
3. $A \to (B \to C) \vdash_\tau (A \to B) \to (A \to C)$

3. Aufgabe: [Kompaktheitssatz, 6P]

1. Zeigen Sie, dass es für eine Menge von Formeln Σ und eine Formel A genau dann ein abgeschlossenes Tableau für $\Sigma \cup \{\neg A\}$ gibt, wenn es für eine endliche Teilmenge $\Gamma \subset \Sigma$ ein abgeschlossenes Tableau für $\Gamma \cup \{\neg A\}$ gibt.

   Hinweis: Benutzen Sie das Lemma von König, das aussagt, dass Bäume genau dann endlich sind, wenn jeder Ast endlich ist.
2. Zeigen Sie, dass der Kompaktheitssatz für die Tableauxfolgerung gilt, also dass

   $$\Sigma \vdash_\tau A \text{ gdw. es eine endliche Teilmenge } \Sigma_0 \subseteq \Sigma \text{ gibt mit } \Sigma_0 \vdash_\tau A$$

   gilt.

4. Aufgabe: [Tableauxfolgerung, 5P]
Zeigen Sie:

1. $\{p, p \vee q, p \to s, r \to q\} \vdash_\tau q \to p$
2. $\{p, p \vee q, p \to s, r \to q\} \vdash_\tau s$
3. $\vdash_\tau (\neg(p \to q) \to (q \to p))$
4. $F \vdash_\tau q \to p \wedge (\neg(s \wedge \neg(s \vee ((q \wedge r) \to p))))$

5. $\neg((A \to (A \vee C)) \wedge D) \vdash_{\mathcal{T}} (C \to B) \vee \neg D$

5. Aufgabe: [DNF aus Tableaux, 2P]
Finden Sie mit Hilfe der Tableauxmethode disjunktive Normalformen für die folgenden Formeln:

1. $(p \to \neg(\neg q \to r)) \to (q \vee r)$
2. $(q \to p) \to \neg(r \to q)$

6. Aufgabe: [Tableaux mit Äquivalenz, 4P]
In der Vorlesung wurden die α- und β-Formeln nur für $\{\neg, \wedge, \vee, \to\}$ definiert und $\leftrightarrow$ weggelassen. Ist $A \equiv B \leftrightarrow C$ eine α- oder β-Formel und welche Komponenten hat diese Aussageform?

7. Aufgabe: [Möglichkeiten und Grenzen der Tableauxmethode, 5P]
Können die folgenden Aussagen mit der Tableauxmethode bewiesen werden? Begründen Sie Ihre Antworten.

1. $\{p, q, r, s\} \models t$
2. $\{p, q, r, s\} \not\models \neg(q \to s)$
3. $F \models \neg(p \to (q \leftrightarrow r) \wedge \neg r) \to (s \vee \neg p)$
4. $\Sigma := \{p_i \wedge \neg p_{i+1} | i \in \mathbb{N}\}$ ist unerfüllbar.
5. $\Sigma := \{p_i \wedge \neg p_{i+1} | i \in 2\mathbb{N}\}$ ist erfüllbar.

Geben Sie so allgemeine Antworten wie möglich. D.h. wenn Sie z.B. erklären können, dass es einen Tableaux-Beweis gibt, ohne diesen anzugeben, dann geben Sie ihn auch nicht an.

8. Aufgabe: [Tableauxfolgerung, Übung]
Zeigen Sie ohne Verwendung der Korrektheit und Vollständigkeit der Tableaux-Folgerung: Wenn $\Sigma \vdash_{\mathcal{T}} p \wedge q$ gilt, dann gilt auch $\Sigma \vdash_{\mathcal{T}} p \vee q$.

Abgabe: bis 25. Mai 2011 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34-401.4