SS 2011 — 01. Juni 2011

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 7

Prof. Dr. Klaus Madlener — Abgabe bis 08. Juni 2011 10:00 Uhr

1. Aufgabe: [Resolution, Übung]
Zeigen Sie mit Resolution:

1. $A \to (B \to A)$ ist Tautologie.
2. $\{p \lor q, q \lor r\} \models p \lor r$.
3. $X \equiv (\neg B \to F) \land (((B \land F) \to \neg E) \land ((E \lor \neg B) \to \neg F))$ ist erfüllbar.

2. Aufgabe: [Prädikatenlogik-Aufwärmaufgabe, Übung]

1. Werten Sie die beiden Formeln $U(x)$ und $G(x)$ von Folie 140 für $x = 2, 3$ und 4 (in $\mathbb{Z}$) aus.
2. Geben Sie eine Formel $T(x, y)$ an, die in $\mathbb{Z}$ die Teilbarkeitsrelation beschreibt.

3. Aufgabe: [Resolution, 10P]
Zeigen Sie mit Resolution:

1. $p \models p \lor q$.
2. $\{p \lor q, \neg q \lor r\} \models p \lor r$.
3. $(((p \to q) \to p) \to p)$ ist Tautologie.
4. $(((p \to q) \land (q \to r)) \to \neg(\neg r \land p))$ ist Tautologie.
5. $\neg((\neg p \to (q \lor r)) \land \neg((p \land \neg q) \lor (r \land \neg s \land t)) \land (q \to s) \land \neg(s \lor \neg t))$ ist Tautologie.

4. Aufgabe: [Erfüllende Bewertungen mit Resolution, 4P]
Zeigen Sie mit Resolution:

1. $(\neg p \lor q) \land (\neg q \lor r) \land (\neg r \lor s) \land (\neg s \lor p)$ ist erfüllbar.
2. $(p \to q) \land (\neg q \lor r) \not\models \neg r$

5. Aufgabe: [Eigenschaften der Resolution, 7P]

1. Beweisen Sie die Korrektheit des Resolutionskalküls.
2. Zeigen Sie, dass bei der Resolution keine Schritte mit Klauseln gemacht werden müssen, die von anderen Klauseln subsumiert werden.

Abgabe: bis 08. Juni 2011 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34-401.4

zu **Aufgabe 1:**

1. $A \to (B \to A)$ ist Tautologie.
   Hierfür muss gezeigt werden, dass $\neg(A \to (B \to A))$ unerfüllbar ist. Zunächst wird die Formel in KNF umgewandelt, es gilt
   $$\neg(A \to (B \to A)) \models\!\!\!\dashv \neg(\neg A \vee \neg B \vee A) \models\!\!\!\dashv (A \wedge B \wedge \neg A),$$
   was der Klauselmenge $\{\{A\}, \{B\}, \{\neg A\}\}$ entspricht. Hierauf ist sofort die Resolutionsregel anwendbar, die Resolvente der Klauseln A und $\neg A$ ist die leere Klausel 0.
2. $\{p \vee q, q \vee r\} \models p \vee r$.
   Zu zeigen ist, dass $\{p\vee q, q\vee r, \neg(p\vee r)\}$ unerfüllbar ist. Die letzte Formel muss dafür noch in KNF gebracht werden und man erhält die Klauselmenge $\{\{p, q\}, \{q, r\}, \{\neg p\}, \{\neg r\}\}$ Zunächst können die beiden ersten Klauseln resolviert werden, so dass man $\{p, r\}$ erhält. Diese Klausel kann nacheinander mit $\{\neg p\}$ und $\{\neg r\}$ resolviert werden, so dass p und r eliminiert werden und die leere Klausel $\sqcup$ übrig bleibt.
3. $X \equiv (E \to M) \wedge ((S \to F) \wedge ((M \vee F \to A) \wedge (\neg A)))$ ist erfüllbar.
   Nach Transformation der Formel in KNF beginnen wir mit der Klauselmenge
   $$\begin{aligned}\{K_1 &= \{B, F\},\\ K_2 &= \{\neg B, \neg F, \neg E\},\\ K_3 &= \{\neg E, \neg F\},\\ K_4 &= \{B, \neg F\}\}.\end{aligned}$$
   Als Resolventen erhalten wir zunächst
   $$\begin{aligned}K_5 &= \mathrm{Res}_B(K_1, K_2) = \{F, \neg F, \neg E\},\\ K_6 &= \mathrm{Res}_F(K_1, K_2) = \{B, \neg B, \neg E\},\\ K_7 &= \mathrm{Res}_F(K_1, K_3) = \{B, \neg E\},\\ K_8 &= \mathrm{Res}_F(K_1, K_4) = \{B\},\\ K_9 &= \mathrm{Res}_B(K_2, K_4) = \{F, \neg F\}.\end{aligned}$$
   Die Klauseln K_5 und K_6 sind allgemeingültig und müssen nicht berücksichtigt werden. Die Klausel K_9 ist nicht neu ($= K_3$). Es bleiben nur K_7 und K_8. Mit ihnen erhalten wir weitere Resolventen
   $$\begin{aligned}K_{10} &= \mathrm{Res}_B(K_2, K_7) = \{\neg F, \neg E\},\\ K_{11} &= \mathrm{Res}_B(K_2, K_8) = \{\neg E, \neg F\}.\end{aligned}$$
   Da keine neuen Klauseln gefunden wurden, sind wir mit unserer Resolution fertig. Da die leere Klausel nicht abgeleitet wurde ist die Aussageform erfüllbar.

   Achtung: Hier wurde eine einzelne Formel als erfüllbar nachgewiesen. Dies funktioniert analog auch für endliche (erfüllbare) Mengen von Formeln, nicht jedoch für unendliche. Dort terminiert das Verfahren nicht, da immer neue Klauseln hinzugenommen werden können.

zu **Aufgabe 2:**

1. $U(2)$ und $U(4)$ sind in $\mathbb{Z}$ falsch, $U(3)$ ist wahr, die Formel beschreibt, dass eine Zahl ungerade ist. G beschreibt gerade Zahlen, also sind $G(2)$ und $G(4)$ wahr, $G(3)$ ist falsch.
2. $T(x, y) \equiv \exists z[x \cdot z = y]$ drückt aus, dass x y teilt.

zu **Aufgabe 3:**

1. $p \models p \vee q$:
   zu zeigen: $\{\{p\}, \{\neg p\}, \{\neg q\}\}$ ist unerfüllbar. Dies geht sofort, da $\mathrm{Res}_p(p, \neg p) = 0$ ist.
2. $\{p \vee q, \neg q \vee r\} \models p \vee r$:
   zu zeigen: $\{\{p, q\}, \{\neg q, r\}, \{\neg p\}, \{\neg r\}\}$ ist unerfüllbar.

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \{p, q\}, \\
K_2 &= \{\neg q, r\}, \\
K_3 &= \{\neg p\}, \\
K_4 &= \{\neg r\}\} \\
K_5 &= \mathrm{Res}_p(K_1, K_3) = \{q\}, \\
K_6 &= \mathrm{Res}_r(K_2, K_4) = \{\neg q, \}, \\
K_7 &= \mathrm{Res}_F(K_5, K_6) = \sqcup.
\end{aligned}
$$

3. $(((p \to q) \to p) \to p)$ ist Tautologie:
   zu zeigen: $\neg(((p \to q) \to p) \to p)$ ist unerfüllbar. Zunächst muss die Formel in KNF gebracht werden:

$$
\begin{aligned}
\neg(((p \to q) \to p) \to p) &\models\mathrel{\mkern-3mu}\Dashv \neg(\neg(\neg(\neg p \vee q) \vee p) \vee p) \\
&\models\mathrel{\mkern-3mu}\Dashv ((\neg(\neg p \vee q) \vee p) \wedge \neg p) \\
&\models\mathrel{\mkern-3mu}\Dashv (((p \wedge \neg q) \vee p) \wedge \neg p) \\
&\models\mathrel{\mkern-3mu}\Dashv ((p \vee p) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p).
\end{aligned}
$$

   Dies entspricht der Klauselmenge $\{\{p\}\{p, \neg q\}\{\neg p\}\}$, woraus sofort $\mathrm{Res}_p(p, \neg p) = 0$ hergeleitet werden kann.
4. $(((p \to q) \wedge (q \to r)) \to \neg(\neg r \wedge p))$ ist Tautologie:
   zu zeigen: $\neg(((p \to q) \wedge (q \to r)) \to \neg(\neg r \wedge p))$ ist unerfüllbar. Wieder wird die Formel in KNF gebracht:

$$
\begin{aligned}
\neg(((p \to q) \wedge (q \to r)) \to \neg(\neg r \wedge p)) &\models\mathrel{\mkern-3mu}\Dashv (((p \to q) \wedge (q \to r)) \wedge (\neg r \wedge p)) \\
&\models\mathrel{\mkern-3mu}\Dashv ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg r \wedge p).
\end{aligned}
$$

Der Beweis ist nun der folgende:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \{\neg p, q\},\\
K_2 &= \{\neg q, r\},\\
K_3 &= \{p\},\\
K_4 &= \{\neg r\}\}\\
K_5 &= \mathrm{Res}_p(K_1, K_3) = \{q\},\\
K_6 &= \mathrm{Res}_r(K_2, K_4) = \{\neg q, \},\\
K_7 &= \mathrm{Res}_F(K_5, K_6) = \sqcup.
\end{aligned}$$

5. $\neg((\neg p \to (q \vee r)) \wedge \neg((p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg s \wedge t)) \wedge (q \to s) \wedge \neg(s \vee \neg t))$ Tautologie: zu zeigen:

$$\begin{aligned}
\{K_1 &= \{p, q, r\},\\
K_2 &= \{\neg p, q\},\\
K_3 &= \{\neg r, s, \neg t\},\\
K_4 &= \{\neg q, s\},\\
K_5 &= \{\neg s\},\\
K_6 &= \{t\}\}
\end{aligned}$$

ist unerfüllbar. Beweis:

$$\begin{aligned}
K_7 &= \mathrm{Res}_p(K_1, K_2) = \{q, r\}\\
K_8 &= \mathrm{Res}_p(K_3, K_5) = \{\neg r, \neg t\}\\
K_9 &= \mathrm{Res}_p(K_7, K_8) = \{q, \neg t\}\\
K_{10} &= \mathrm{Res}_p(K_9, K_6) = \{q\}\\
K_{11} &= \mathrm{Res}_p(K_4, K_5) = \{\neg q\}\\
K_{12} &= \mathrm{Res}_p(K_10, K_11) = \sqcup
\end{aligned}$$

zu **Aufgabe 4:**
Zu zeigen:

1. $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (\neg s \vee p)$ ist erfüllbar.
   Ansatz: Man erzeugt – analog zu Folie 137 bzw. zu Aufgabe 1 – systematisch Klauseln aus den schon vorhandenen, bis keine neuen mehr entstehen. Um eine erfüllende Belegung zu finden, kann man alle Literale sammeln und anhand der Negationssymbole die Belegung bestimmen (hier $\varphi(p) = \varphi(q) = \varphi(r) = \varphi(s) = 0$).
2. $(p \to q) \wedge (\neg q \vee r) \not\models \neg r$
   Zu zeigen ist, dass $\{(p \to q) \wedge (negq \vee r), \neg r\}$ erfüllbar ist. Dies geht wie oben, nur geht es hier schneller. Die KNF ist $\{\{\neg p, q\}\{\neg q, r\}\{r\}\}$. Hier kann nur ein Resolutionsschritt gemacht werden und es bleibt $\{\neg p, r\}$ übrig. Beachtet man noch, dass die zweite Klausel von der dritten subsumiert wird, dann muss überhaupt

kein Schritt gemacht werden, um zu sehen, dass die Klauselmenge erfüllbar ist (vgl. Aufgabe 5). In diesem Fall kann aber im Gegensatz zur ersten Formel keine erfüllende Belegung direkt angegeben werden, da die Atome p und q nicht einzeln bzw. nur negiert stehen bleiben.

zu **Aufgabe 5:**

1. Zum Beweis der Korrektheit des Resolutionskalküls muss gezeigt werden, dass die Regel korrekt ist, dass also für zwei resolvierbare Klauseln $A \equiv \{L_1, L_2, \cdots, L_n\}$ und $B \equiv \{L_1\prime :\equiv \neg L_1, L_2\prime, \cdots, L_m\prime\}$ die Folgerung $A, B \models \mathrm{Res}_{L_1}(A, B)$ gilt.

   Sei also φ eine Bewertung, die A und B erfüllt. Dann gibt es ein $1 \leq i \leq n$, so dass $\varphi(L_i) = 1$ und ein $1 \leq j \leq n$, so dass $\varphi(L_j\prime) = 1$. Da $L_1\prime \equiv \neg L_1$ gilt, kann nicht $i = j = 1$ sein. Die Resolvente von A und B ist $\mathrm{Res}_{L_1}(A, B) \equiv \{L_2, \cdots, L_n, L_2\prime, \cdots, L_m\prime\}$, sie enthält also L_i oder $L_j\prime$ oder sogar beide. Damit gilt auch $\varphi(\mathrm{Res}_{L_1}(A, B)) = 1$.

2. Zu zeigen: Schritte mit subsumierten Klauseln sind überflüssig. Genauer zeigen wir: Sind C_1, C_2 Klauseln mit $C_1 \subseteq C_2$ und gilt $\Sigma \cup \{C_1, C_2\} \overset{+}{\vdash}_{Res} \sqcup\}$, so gilt auch $\Sigma \cup \{C_1\} \overset{+}{\vdash}_{Res} \sqcup\}$.

   Da aber C_2 von C_1 subsumiert wird, gilt $C_1 \models C_2$. D.h. jede erfüllende Belegung für $\Sigma \cup \{C_1\}$ erfüllt auch $\Sigma \cup \{C_1, C_2\}$ bzw. ist $\Sigma \cup \{C_1\}$ erfüllbar, so auch $\Sigma \cup \{C_1, C_2\}$. Da aus $\Sigma \cup \{C_1, C_2\}$ die leere Klausel hergeleitet werden kann, ist die Menge aber unerfüllbar und damit muss auch $\Sigma \cup \{C_1\}$ unerfüllbar sein. Damit gilt $\Sigma \cup \{C_1\} \overset{+}{\vdash}_{Res} \sqcup$.