SS 2011 08. Juni 2011

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 8

Prof. Dr. Klaus Madlener Abgabe bis 23. Juni 2011 10:00 Uhr

1. Aufgabe: [Terme und Formeln, Übung]

Betrachten Sie folgende Ausdrücke:

a) $3 + 4$

b) $x \cdot 7$

c) $3 + x \geq 28$

d) if $3 + x \leq 28$ then 5 else 7

e) if $3 + x \geq 28$ then $5 = 8$ else 7

f) if $3 + x \geq 28$ then (if $x > b$)then $5 > 3$ else $3 > 5$) else $p(x \cdot (3 + 4))$

g) p_1

h) $((\forall x)((\exists y)(x \geq y)))$

i) $\forall F[F(x) = 0 \rightarrow 3 + 4 \geq 7]$

Die folgenden Aufgaben dienen dazu, sich näher mit der Definition von Termen, Formeln, Interpretationen etc. zu beschäftigen und ein Gefühl für die Begriffe zu entwickeln.

1. Welche der obigen Ausdrücke sind Terme bzw. Formeln der Prädikatenlogik?
2. Welche (Teil-)Formeln sind atomar?
3. Identifizieren Sie die Funktions- und Prädikatskonstanten und Variablen. Geben Sie dabei deren Stelligkeit an.
4. Welche Variablen kommen gebunden vor, welche sind frei?
5. Geben Sie zu jeder Formel eine Interpretation an, die die Formel erfüllt.
6. Geben Sie zu jeder Formel eine Interpretation an, die die Formel nicht erfüllt.

2. Aufgabe: [Formalisierung in PL, 8P]

Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

a) „Es gibt mindestens einen Drachen."

b) „Helden töten Drachen."

c) „Siegfried ist ein Held und badet in Drachenblut."

d) „Wer in Drachenblut badet, wird unverwundbar."

e) „Siegfried heiratet Kriemhild."

f) „Es gibt mindestens zwei verschiedene Männer, die Kriemhild heiratet."

g) „Hagen ist weder Held noch Drache und er tötet Siegfried."

h) „Etzel ist Kriemhilds zweiter Mann."

i) „Kriemhild tötet ihren Bruder."
j) „Am Ende sind alle tot."

Formalisieren Sie diese Kurzform der Nibelungensage mit Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe:

1. Geben Sie eine möglichst kleine geeignete Sprache der Prädikatenlogik 1. Stufe an, die alle notwendigen Prädikats- und Funktionssymbole enthält.
2. Stellen Sie Formeln auf, die die obigen Aussagen beschreiben.
3. Diskutieren Sie kurz die auftretenden Probleme bei der Angabe der Formeln.

3. Aufgabe: [Interpretationen, 6P]
Definieren Sie eine Interpretation I, in der folgende Formeln gelten:

1. $\exists x \forall y\ y + x = 0$,
2. $\forall x \forall y \forall z\ x + (y + z) = (x + y) + z$,
3. $\forall x \forall y\ (x + y = y + x) \to x = y$ und
4. $\exists x\ x + 5 < x$.

Hier sind 0 und 5 Individuenkonstanten, $+$ ist eine zweistellige Funktionskonstante und $<$ ist eine zweistellige Prädikatskonstante.

4. Aufgabe: [Allgemeingültigkeit, 5P]
Welche der folgenden prädikatenlogischen Formeln sind allgemeingültig?

1. $(x = y \wedge y = z) \to x = z$,
2. $(x < y \wedge y < z) \to x < z$,
3. $\forall Q\ Q(x) \to \neg x = x$,
4. $(p(x) \to q(x)) \to \forall x\ (p(x) \to q(x))$ und
5. $\exists x\ (p(x) \to \forall y\ p(y))$.

5. Aufgabe: [strukturelle Induktion PL, 6P]
Seien $I_1 = (D_1, I_{C_1}, I_{V_1})$ und $I_2 = (D_2, I_{C_2}, I_{V_2})$ Interpretationen mit $D_1 = D_2$. Zeigen Sie, dass dann für alle Formeln A Folgendes gilt:

Stimmen I_1 und I_2 auf allen Konstanten und freien Variablen von A überein, so ist $I_1(A) = I_2(A)$.

Abgabe: bis 23. Juni 2011 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34-401.4

zu **Aufgabe 1:**

1. Welche der obigen Ausdrücke sind Terme bzw. Formeln der Prädikatenlogik? Genau genommen kann das nicht gesagt werden, da nicht definiert wurde, welche der Symbole Funktions- und welche Prädikatssymbole sind. Wir interpretieren die Symbole hier aber in der aus der Mathematik gewohnten Art und Weise.
   a) $3 + 4$ ist ein Term, da $+$ ein Funktionssymbol ist.
   b) $x \cdot 7$ ist ebenfalls ein Term.
   c) $3 + x \geq 28$ ist eine Formel, da $\geq$ ein Prädikatssymbol ist.
   d) if $3 + x \leq 28$ then 5 else 7 ist ein Term, da 5 und 7 Terme sind.
   e) if $3 + x \geq 28$ then $5 = 8$ else 7 ist weder Term noch Formel, da $5 = 8$ eine Formel, 7 aber ein Term ist.
   f) if $3 + x \geq 28$ then (if $x > b$) then $5 > 3$ else $3 > 5$) else $p(x \cdot (3 + 4))$ ist eine Formel, da (if x > b) then $5 > 3$ else $3 > 5$) und $p(x \cdot (3 + 4))$ Formeln sind.
   g) p_1 ist eine 0-stellige Prädikatskonstante, also eine aussagenlogische Variable, und damit eine Formel.
   h) $((\forall x)((\exists y)(x \geq y)))$ ist eine Formel.
   i) $\forall F[F(x) = 0 \rightarrow 3 + 4 \geq 7]$ ist eine Formel.
2. Welche (Teil-)Formeln sind atomar?
   c) $3 + x \geq 28$ ist atomar.
   d) if $3+x \leq 28$ then 5 else 7 enthält die atomare Formel $3+x \leq 28$. Dies ist aber im eigentlichen Sinne keine Teilformel, da der Ausdruck selbst keine Formel ist.
   e) if $3 + x \geq 28$ then $5 = 8$ else 7: Hier liegt die selbe Situation vor: $3 + x \geq 28$ und $5 = 8$ sind atomar, aber keine Teilformeln.
   f) if $3 + x \geq 28$ then (if $x > b$) then $5 > 3$ else $3 > 5$) else $p(x \cdot (3 + 4))$ enthält die atomaren Teilformeln $3 + x \geq 28$, $x > b$, $5 > 3$ und $3 > 5$.
   g) p_1 ist atomar.
   h) $((\forall x)((\exists y)(x \geq y)))$: $x \geq y$ ist atomare Teilformel.
   i) $\forall F[F(x) = 0 \rightarrow 3+4 \geq 7]$: $F(x) = 0$ und $3+4 \geq 7$ sind atomare Teilformeln.
3. Identifizieren Sie die Funktions- und Prädikatskonstanten und Variablen. Geben Sie dabei deren Stelligkeit an.
   - $+$ und $\cdot$ sind zweistellige Funktionskonstanten.
   - F ist eine einstellige Funktionsvariable.
   - $\geq$, $\leq$ und $>$ sind zweistellige Prädikatskonstanten, p ist eine einstellige und p_1 ist eine nullstellige Prädikatskonstante.
4. Welche Variablen kommen gebunden vor, welche sind frei?
   - In h) kommen x und y und in i) kommt F gebunden vor. Alle anderen vorkommen von Variablen (nur x) sind frei.

5. Geben Sie zu jeder Formel eine Interpretation an, die die Formel erfüllt.
   Die Formeln (c), f), g), h), i)) sind alle erfüllt, wenn die jeweiligen Prädikate alle wahr sind. Wähle daher eine beliebige Interpretation $I = (D, I_c, I_v)$ mit $I_c(\geq) = I_c(\leq) = I_c(>) = D^2$, $I_c(p) = D$ und $I_c(p_1) = W$. Diese Interpretation erfüllt alle Formeln unabhängig von der Interpretation der Funktionssymbole.
6. Geben Sie zu jeder Formel eine Interpretation an, die die Formel nicht erfüllt.
   Analog zu oben dürfen hier die Prädikate nicht wahr sein. Wähle daher eine beliebige Interpretation $I = (D, I_c, I_v)$ mit $I_c(\geq) = I_c(\leq) = I_c(>) = I_c(p) = \emptyset$ und $I_c(p_1) = F$. Diese Interpretation erfüllt keine der Formeln c), f), g), h) und i).

zu **Aufgabe 2:**

Wir benutzen die folgenden Symbole:

Symbol	Typ	Bedeutung
$drache$	einstellige Prädikatskonstante	$drache(x) \triangleq$ „x ist Drache “
$held$	einstellige Prädikatskonstante	$held(x) \triangleq$ „x ist Held “
$badet$	einstellige Prädikatskonstante	$badet(x) \triangleq$ „x badet in Drachenblut “
$unverwundbar$	einstellige Prädikatskonstante	$unverwundbar(x) \triangleq$ „x ist unverwundbar “
tot	einstellige Prädikatskonstante	$tot(x) \triangleq$ „x ist tot “
$t\ddot{o}tet$	zweistellige Prädikatskonstante	$t\ddot{o}tet(x, y) \triangleq$ „x tötet y “
$heiratet$	zweistellige Prädikatskonstante	$heiratet(x, y) \triangleq$ „x heiratet y “
$siegfried$	nullstellige Funktionsskonstante	„Siegfried “
$kriemhild$	nullstellige Funktionsskonstante	„Kriemhild “
$hagen$	nullstellige Funktionsskonstante	„Hagen “
$etzel$	nullstellige Funktionsskonstante	„Etzel “
2	nullstellige Funktionsskonstante	Die natürliche Zahl „2 “
$bruder$	einstellige Funktionsskonstante	$bruder(a) \triangleq$ „Bruder von a “
$mann$	zweistellige Funktionsskonstante	$mann(a, b) \triangleq$ „a-ter Mann von b “

a) „Es gibt mindestens einen Drachen.“ $\triangleq \exists x[drache(x)]$

b) „Helden töten Drachen.“ $\triangleq \forall x \forall y[held(x) \wedge drache(y) \to t\ddot{o}tet(x, y)]$
   Gilt das immer, d.h. töten alle Helden immer alle Drachen? Das ist unklar, die Quantoren wegzulassen würde der Sache aber auch nicht gerecht werden.

c) „Siegfried ist ein Held und badet in Drachenblut.“ $\triangleq held(siegfried) \wedge badet(siegfried)$

d) „Wer in Drachenblut badet, wird unverwundbar.“ $\triangleq \forall x[badet(x) \to unverwundbar(x)]$

e) „Siegfried heiratet Kriemhild.“ $\triangleq heiratet(siegfried, kriemhild)$

f) „Es gibt mindestens zwei verschiedene Männer, die Kriemhild heiratet.“ $\triangleq \exists x \exists y[heiratet(kriemhild, x$
   $heiratet(kriemhild, y) \wedge \neg(x = y)]$

g) „Hagen ist weder Held noch Drache und er tötet Siegfried.“ $\triangleq \neg held(hagen) \wedge \neg drache(hagen) \wedge t\ddot{o}tet(hagen, siegfried)$
   Diese Aussage scheint die Formelmenge auf den ersten Blick unerfüllbar zu machen, da ja Siegfried wegen c) und d) unverwundbar sein muss. Hier wird jedoch gar nicht gefordert, dass jemand, der unverwundbar ist, auch nicht getötet werden

kann. Theoretisch, wenn auch nicht im Sinne der Sage, können beider Formeln erfüllt werden. Die Interpretation, die die Sage tatsächlich liefert, löst das Problem anders: Dort gilt die Aussage „ Wer in Drachenblut badet, wird unverwundbar“gar nicht.

h) „Etzel ist Kriemhilds zweiter Mann.“ $\hat{=}$ $etzel = mann(2, kriemhild)$ Diese Aussage ist nicht intuitiv darstellbar. Hier wird eine Funktion verwendet, die allgemein zu einer Person b den a-ten Mann liefert. Damit diese Funktion sinnvoll interpretiert werden kann, muss der Definitionsbereich D der Interpretation die natürlichen Zahlen bzw. zumindest die 2 enthalten und es muss ein entsprechendes Funktionssymbol verwendet werden. Wird die Funktion in ihrer vollen Allgemeinheit und im Sinne der Sage interpretiert, so ist ggf. zusätzlich noch etwas wie „undef“ o.Ä. notwendig, weil Kriemhild nicht unendlich viele Männer hat. Eine andere Möglichkeit wäre, ein nullstelliges Funktionssymbol $zweiterMannVonKriemhild$ einzuführen. Dies würde die 2 überflüssig machen, wäre aber andererseits redundant zu $etzel$.

i) „Kriemhild tötet ihren Bruder.“ $\hat{=}$ $tötet(kriemhild, bruder(kriemhild))$

j) „Am Ende sind alle tot.“ $\hat{=}$ $\forall x[tot(x)]$ Wann ist das Ende? Diese Aussage stellt einen zeitlichen Zusammenhang her, der in Prädikatenlogik gar nicht ausgedrückt werden kann. Die Sage liefert uns tatsächlich nicht nur eine Interpretation, sondern zu jedem Zeitpunkt eine andere. Die Formel $\forall x[tot(x)]$ ist sicher nicht zu jedem Zeitpunkt der Geschichte erfüllt.

zu **Aufgabe 3:**

Hier tut’s zum Beispiel ein $I = (D, I_c, I_v)$ mit $D = \{a\}$ (nur ein Element in D und $I(<)(a, a) = W$. Der Rest der Interpretation ist dann auch schon festgelegt. $I_c(0)$ muss aus D sein, also gilt $I_c(0) = a$. Genauso ist $I_c(5) = a$ und $I_c(+)(d_1, d_2) = a$ für alle $d_1, d_2 \in D$.

Man kann auch eine Interpretation $I' = (D', I'_c, I'_v)$ mit beliebigem D' und $I'(+)(d_1, d_2) = d_2$ für alle $d_1, d_2 \in D'$ und $I'(<)(I_c(5), I_c(5)) = 1$ nehmen. Der Rest von I' kann beliebig gewählt werden. (Die erste Lösung ist ein Spezialfall hiervon).

zu **Aufgabe 4:**

1.

$$
\begin{aligned}
&I((x = y \land y = z) \to x = z) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls } I_V(x) = I_V(y) \text{ und } I_V(y) = I_V(z) \text{ und nicht } I_V(x) = I_V(z) \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

weil nicht gleichzeitig $I_V(x) = I_V(y) = I_V(z)$ und $I_V(y) \neq I_V(z)$ sein kann, für beliebiges I_V. Die Formel ist also allgemeingültig!

2. ist nicht allgemeingültig, das < kann beliebig interpretiert werden. Die Gültigkeit der Formel wäre nur unter Voraussetzung der Transitivität zu zeigen.

3.

$$
\begin{aligned}
& I(\forall Q Q(x) \to \neg x = x) \\
& = \begin{cases} 0, & \text{falls } I(\forall Q Q(x)) = 1 \text{ und } I(\neg x = x) = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \\
& \text{da stets } I(\neg x = x) = 0 \text{ kann man vereinfachen} \\
& = 1 - I(\forall Q Q(x)) = I(\neg \exists Q \neg Q(x)) \\
& = \begin{cases} 1, & \text{falls es ein einstelliges Prädikat } p \text{ gibt mit } I^{Q,p}(\neg Q(x)) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
& = 1,
\end{aligned}
$$

weil man für p ein nicht erfüllbares Prädikat wählen kann.

Man kan statt mit Prädikaten auch analog mit Teilmengen von D argumentieren. Einem Prädikat $p : D \to \mathbb{B}$ entspricht die Teilmenge $\{d \in D \mid p(d) = 1\}$ und einer Teilmenge $S \subseteq D$ entspricht das Prädikat p mit $p(d) = \begin{cases} 1, & \text{falls } d \in S \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$ Ein „Wörterbuch“für die Übersetzung von Prädikaten in Teilmengen ist:

Prädikate p	Teilmengen S
$p : D^n \to \mathbb{B}$	$S \subseteq D^n$
$p(d_1, \ldots, d_n) = 1$	$(d_1, \ldots, d_n) \in S$

4. ist nicht allgemeingültig. Ein Gegenbeispiel ist $I = (D, I_c, I_v)$ mit $D = \{1, 2\}$, “$I_c(p)(d) = 1$ genau dann, wenn $d = 1$”, “$I_c(q)(d) = 1$ genau dann, wenn $d = 2$” und $I_v(x) = 2$.

5. ist wieder allgemeingültig. Sei dazu I eine passende Interpretation. Gilt $I \models \forall y\, p(y)$, so gilt auch $I \models \exists x\, (p(x) \to \forall y\, p(y))$. Gilt aber $I \models \forall y\, p(y)$ nicht, gibt es ein $d \in D$ mit $I^{y,d}(p(y)) = 0$. Dann gilt aber auch $I^{x,d}(p(x) \to \forall y\, p(y)) = 1$.

zu **Aufgabe 5:** Zu zeigen: Stimmen I_1 und I_2 auf allen Konstanten und freien Variablen von A überein, so ist $I_1(A) = I_2(A)$.

Der Beweis wird durch Induktion über den Aufbau von Formeln geführt. Dabei stellt man fest, dass die Aussage auch für Terme gezeigt werden muss, da atomare Formeln aus Termen zusammengesetzt sein können. Die naheliegendste Idee ist nun, zuerst eine Induktion über den Aufbau von Termen zu machen, wobei allerdings der Fall des „if-then-else“Schwierigkeiten bereitet, da dieser Term eine Formel für den Aufbau benötigt. Es handelt sich hier also ume eine verschränkte induktive Definition von Termen und Formeln und deshalb ist es notwendig, beide Fälle gleichzeitig zu behandeln.

Es folg also eine Induktion über den Aufbau von Termen und Formeln. Auch wenn nach Konvention nur Formeln mit A bezeichnet werden, soll A hier je nach Kontext für einen Term oder eine Formel stehen. Seien $I_1 = (D_1, I_{C_1}, I_{V_1})$ und $I_2 = (D_2, I_{C_2}, I_{V_2})$ Interpretationen mit $D_1 = D_2$, so dass I_1 und I_2 auf allen Konstanten und freien Variablen von A übereinstimmen.

IA: **Fall 1:** $A \equiv a_j$**:** Da a_j eine Konstante ist,gilt $I_1(A) = I_1(a_j) = I_{C_1}(a_j) = I_{C_2}(a_j) = I_2(a_j) = i_2(A)$ nach Voraussetzung.

Fall 2: $A \equiv x_j$**:** Da x_j eine Variable ist,gilt $I_1(A) = I_1(x_j) = I_{V_1}(x_j) = I_{V_2}(x_j) = I_2(x_j) = i_2(A)$ nach Voraussetzung.

Fall 3: $A \equiv W$**:** Nach der Definition von Bewertungen gilt immer $I_1(W) = I_2(W) = 1$.

Fall 4: $A \equiv F$**:** Nach der Definition von Bewertungen gilt immer $I_1(F) = I_2(F) = 0$.

Fall 4: $A \equiv p_j$**:** Da p_j eine Variable ist,gilt $I_1(A) = I_1(p_j) = I_{V_1}(p_j) = I_{V_2}(p_j) = I_2(p_j) = i_2(A)$ nach Voraussetzung.

Fall 5: $A \equiv P_j$**:** Da P_j eine Variable ist,gilt $I_1(A) = I_1(P_j) = I_{V_1}(P_j) = I_{V_2}(P_j) = I_2(P_j) = i_2(A)$ nach Voraussetzung.

Die weiteren atomaren Formeln müssen im Induktionsschritt behandelt werden, da sie aus Termen zusammengesetzt sind.

IV: Für alle echten Teilterme und Teilformeln von A bzw. alle in A vorkommenden Terme und Formeln B gelte $I_1(B) = I_2(B)$

IS: **Fall 1:** $A \equiv p_j(t_1, \cdots, t_n)$**:** Es gilt

$$\begin{aligned}
I_1(A) &= I_1(p_j(t_1, \cdots, t_n)) \\
&= I_{C_1}(p_j(I_1(t_1), \cdots, I_1(t_n)) \\
&= I_{C_2}(p_j(I_1(t_1), \cdots, I_1(t_n)) && \text{nach Voraussetzung} \\
&= I_{C_2}(p_j(I_2(t_1), \cdots, I_2(t_n)) && \text{nach IV} \\
&= I_2(p_j(t_1, \cdots, t_n)) \\
&= I_2(A)
\end{aligned}$$

Fall 2: $A \equiv P_j(t_1, \cdots, t_n)$**:** Es gilt

$$\begin{aligned}
I_1(A) &= I_1(P_j(t_1, \cdots, t_n)) \\
&= I_{V_1}(P_j(I_1(t_1), \cdots, I_1(t_n)) \\
&= I_{V_2}(P_j(I_1(t_1), \cdots, I_1(t_n)) && \text{nach Voraussetzung} \\
&= I_{V_2}(P_j(I_2(t_1), \cdots, I_2(t_n)) && \text{nach IV} \\
&= I_2(P_j(t_1, \cdots, t_n)) \\
&= I_2(A)
\end{aligned}$$

Fall 3: $A \equiv \neg B$**:** Es gilt

$$I_1(A) = I_1(\neg B) = 1 - I_1(B) \overset{\text{IV}}{=} 1 - I_2(B) = I_2(\neg B) = I_2(A)$$

Fall 4: $A \equiv B \to C$**:** Es gilt

$$\begin{aligned}
I_1(A) &= I_1(B \to C) \\
&= \begin{cases} 1 & \text{falls } I_1(B) = 1 \text{ und } I_1(C) = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{falls } I_2(B) = 1 \text{ und } I_2(C) = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} && \text{nach IV} \\
&= I_2(B \to C) \\
&= I_2(A)
\end{aligned}$$

Fall 5: $A \equiv B \vee C$**:** Es gilt

$$I_1(A) = I_1(B \vee C) = \max(I_1(B), I_1(C)) \overset{\text{IV}}{=} \max(I_2(B), I_2(C)) = I_2(B \vee C) = I_2(A)$$

Fall 6: $A \equiv B \wedge C$**:** Es gilt

$$I_1(A) = I_1(B \wedge C) = \min(I_1(B), I_1(C)) \overset{\text{IV}}{=} \min(I_2(B), I_2(C)) = I_2(B \wedge C) = I_2(A)$$

Fall 7: $A \equiv B \leftrightarrow C$**:** Es gilt

$$\begin{aligned}
I_1(A) &= I_1(B \leftrightarrow C) \\
&= \begin{cases} 1 & \text{falls } I_1(B) = I_1(C) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{falls } I_2(B) = I_2(C) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} && \text{nach IV} \\
&= I_2(B \leftrightarrow C) \\
&= I_2(A)
\end{aligned}$$

Fall 8: $A \equiv if\ B\ then\ C\ else\ D$**:** Es gilt (sowohl für Terme als auch für Formeln)

$$\begin{aligned}
I_1(A) &= I_1(if\ B\ then\ C\ else\ D) \\
&= \begin{cases} I_1(C) & \text{falls } I_1(B) = 1 \\ I_1(D) & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} I_2(C) & \text{falls } I_2(B) = 1 \\ I_2(D) & \text{sonst} \end{cases} && \text{nach IV} \\
&= I_2(if\ B\ then\ C\ else\ D) \\
&= I_2(A)
\end{aligned}$$

Fall 9: $A \equiv (\forall x)B$**:** Es gilt

$$\begin{aligned} I_1(A) &= I_1((\forall x)B) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls für alle } d \in D_1 \text{ gilt } {I_1}^{x,d}(B) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls für alle } d \in D_2 \text{ gilt } {I_2}^{x,d}(B) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} && \text{nach IV und weil } D_1 = D_2 \\ &= I_2((\forall x)B) \\ &= I_2(A) \end{aligned}$$

Fall 10: $A \equiv (\exists x)B$**:** Es gilt

$$\begin{aligned} I_1(A) &= I_1((\exists x)B) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls es } d \in D_1 \text{ gibt mit } {I_1}^{x,d}(B) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls es } d \in D_2 \text{ gibt mit } {I_2}^{x,d}(B) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} && \text{nach IV und weil } D_1 = D_2 \\ &= I_2((\forall x)B) \\ &= I_2(A) \end{aligned}$$