SS 2011 08. Juni 2011

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 8

Prof. Dr. Klaus Madlener Abgabe bis 23. Juni 2011 10:00 Uhr

1. Aufgabe: [Terme und Formeln, Übung]

Betrachten Sie folgende Ausdrücke:

a) $3 + 4$

b) $x \cdot 7$

c) $3 + x \geq 28$

d) if $3 + x \leq 28$ then 5 else 7

e) if $3 + x \geq 28$ then $5 = 8$ else 7

f) if $3 + x \geq 28$ then (if $x > b$)then $5 > 3$ else $3 > 5$) else $p(x \cdot (3 + 4))$

g) p_1

h) $((\forall x)((\exists y)(x \geq y)))$

i) $\forall F[F(x) = 0 \rightarrow 3 + 4 \geq 7]$

Die folgenden Aufgaben dienen dazu, sich näher mit der Definition von Termen, Formeln, Interpretationen etc. zu beschäftigen und ein Gefühl für die Begriffe zu entwickeln.

1. Welche der obigen Ausdrücke sind Terme bzw. Formeln der Prädikatenlogik?
2. Welche (Teil-)Formeln sind atomar?
3. Identifizieren Sie die Funktions- und Prädikatskonstanten und Variablen. Geben Sie dabei deren Stelligkeit an.
4. Welche Variablen kommen gebunden vor, welche sind frei?
5. Geben Sie zu jeder Formel eine Interpretation an, die die Formel erfüllt.
6. Geben Sie zu jeder Formel eine Interpretation an, die die Formel nicht erfüllt.

2. Aufgabe: [Formalisierung in PL, 8P]

Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

a) „Es gibt mindestens einen Drachen."

b) „Helden töten Drachen."

c) „Siegfried ist ein Held und badet in Drachenblut."

d) „Wer in Drachenblut badet, wird unverwundbar."

e) „Siegfried heiratet Kriemhild."

f) „Es gibt mindestens zwei verschiedene Männer, die Kriemhild heiratet."

g) „Hagen ist weder Held noch Drache und er tötet Siegfried."

h) „Etzel ist Kriemhilds zweiter Mann."

i) „Kriemhild tötet ihren Bruder.“

j) „Am Ende sind alle tot.“

Formalisieren Sie diese Kurzform der Nibelungensage mit Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe:

1. Geben Sie eine möglichst kleine geeignete Sprache der Prädikatenlogik 1. Stufe an, die alle notwendigen Prädikats- und Funktionssymbole enthält.
2. Stellen Sie Formeln auf, die die obigen Aussagen beschreiben.
3. Diskutieren Sie kurz die auftretenden Probleme bei der Angabe der Formeln.

3. Aufgabe: [Interpretationen, 6P]

Definieren Sie eine Interpretation I, in der folgende Formeln gelten:

1. $\exists x \forall y\ y + x = 0$,
2. $\forall x \forall y \forall z\ x + (y + z) = (x + y) + z$,
3. $\forall x \forall y\ (x + y = y + x) \to x = y$ und
4. $\exists x\ x + 5 < x$.

Hier sind 0 und 5 Individuenkonstanten, + ist eine zweistellige Funktionskonstante und < ist eine zweistellige Prädikatskonstante.

4. Aufgabe: [Allgemeingültigkeit, 5P]

Welche der folgenden prädikatenlogischen Formeln sind allgemeingültig?

1. $(x = y \land y = z) \to x = z$,
2. $(x < y \land y < z) \to x < z$,
3. $\forall Q\ Q(x) \to \neg x = x$,
4. $(p(x) \to q(x)) \to \forall x\ (p(x) \to q(x))$ und
5. $\exists x\ (p(x) \to \forall y\ p(y))$.

5. Aufgabe: [strukturelle Induktion PL, 6P]

Seien $I_1 = (D_1, I_{C_1}, I_{V_1})$ und $I_2 = (D_2, I_{C_2}, I_{V_2})$ Interpretationen mit $D_1 = D_2$. Zeigen Sie, dass dann für alle Formeln A Folgendes gilt:

Stimmen I_1 und I_2 auf allen Konstanten und freien Variablen von A überein, so ist $I_1(A) = I_2(A)$.

Abgabe: bis 23. Juni 2011 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34-401.4