SS 2011 22. Juni 2011

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 9

Prof. Dr. Klaus Madlener Abgabe bis 29. Juni 2011 10:00 Uhr

1. Aufgabe: [Allgemeingültigkeit, Übung]
Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln allgemeingültig sind:

$A_1 \equiv (a = 3 \to (q \to \forall y[a = y \to y = 4])) \to ((a = 3 \to q) \to (a = 3 \to \forall y[a = y \to y = 4]))$

$A_2 \equiv \forall z \forall x[p(x)] \to p(f(a, 5))$

$A_3 \equiv \exists P \forall Q[P \to (Q \wedge r) \to P \vee r]$

$A_4 \equiv \exists P[P]$

2. Aufgabe: [Substitution, Übung]

1. Finden Sie eine Formel A, einen Term t und eine Individuenvariable x, so dass die Substitution $A_x[t]$ erlaubt ist, $A_x[t]$ allgemeingültig ist, aber A nicht allgemeingültig ist.
2. Gegeben sei die Substitution σ aus Aufgabe 5. Wenden Sie diese Substitution auf die folgenden Terme und Formeln an:

   $A_1 \equiv (x < 3 \to p(x_1))$

   $A_2 \equiv \exists x[x = 0 \vee P(x_3)]$

   $A_3 \equiv \forall x[\neg x_1 = 0]$

   $A_4 \equiv \forall x_1[\neg x_1 = 0] \to p$

3. Aufgabe: [Semantische Folgerung, Übung]
Es sei $A \in$ Form. Zeigen oder widerlegen Sie:

1. $\exists y \forall x\ A \models \forall x \exists y\ A$
2. $\forall x \exists y\ A \models \exists y \forall x\ A$
3. $\forall x\ f(x) = g(x) \models f = g$.

4. Aufgabe: [Tautologien in PL, 5P]
Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln allgemeingültig sind:

$A_1 \equiv \forall x \exists P[P(x) \vee x = f(a)] \to (Q(y, z) \to \forall x \exists P[P(x) \vee x = f(a)])$

$A_2 \equiv \forall x[q(x)] \to q(h(g(a, f(b)), b, f(c)))$

$A_3 \equiv \forall z[\neg(x = f(x) \to p(f(x))) \to (p(f(x)) \to x = f(x))]$

$A_4 \equiv \exists P[P \to q \vee r]$

5. Aufgabe: [Substitution, 10 P]
Die Substitution σ sei durch

$$\begin{aligned}
\sigma(x_1) &= x + 3 \cdot x\\
\sigma(x_2) &= 3 - (x + x_1) \cdot 2\\
\sigma(x_3) &= 42\\
\sigma(x_4) &= f(a, g(b))\\
\sigma(x_5) &= if\ (x > 3)\ then\ 5\ else\ 3\\
\sigma(x_6) &= g(y * 2)
\end{aligned}$$

gegeben. Wenden Sie σ auf die folgenden Formeln an. Geben Sie jeweils mit an, ob die Substitution erlaubt ist.

$A_1 \equiv x_1 \geq x_3$
$A_2 \equiv \forall x[x = 42 \to \neg(x_4 = 3)]$
$A_3 \equiv \exists y[f(y) = 0 \to \forall x[x \geq x_2]]$
$A_4 \equiv p(x_1) \vee \forall x[x + 3 > x_6]$
$A_5 \equiv \forall x[x_5 = 5 \to x > 3]$
$A_6 \equiv x_3 < x_4 \vee \forall y[p(y) \vee y = 3]$
$A_7 \equiv \forall x_3[x_3 = 42]$

6. Aufgabe: [Entscheidbarkeit der Gleichheitslogik, 5P]
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Allgemeingültigkeit von Formeln im Allgemeinen unentscheidbar ist. Dies gilt jedoch nicht für alle eingeschränkten Formelklassen.

Betrachten Sie Formeln der *reinen Gleichheitslogik*, d.h. Formeln in den Operatoren $\{\neg, \wedge, \vee, \forall, \exists\}$, die nur Individuenvariablen „x_i" und „=" enthalten. Ein Beispiel wäre also

$$\forall x \forall y \exists z\ [(x = y \wedge y \neq z) \to x = z].$$

Skizzieren Sie ein Verfahren, das entscheidet, ob eine solche Formel allgemeingültig ist, oder nicht. Begründen Sie die Korrektheit Ihres Verfahrens.

Abgabe: bis 29. Juni 2011 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34-401.4

zu **Aufgabe 1:**

$A_1 \equiv (a = 3 \to (q \to \forall y[a = y \to y = 4])) \to ((a = 3 \to q) \to (a = 3 \to \forall y[a = y \to y = 4]))$
:
: Diese Formel entsteht aus $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$, indem p durch $\forall x \exists P[P(x) \vee x = f(a)]$ und q durch $Q(y, z)$ ersetzt wird. Diese Formel ist bekanntermaßen eine Tautologie und nach dem Tautologie-Theorem ist A_1 dann auch eine Tautologie.

$A_2 \equiv \forall z \forall x[p(x)] \to p(f(a, 5))$:
: A_2 ist $\forall z \forall x[A] \to A_x[t]$ mit $A \equiv p(x, y)$ und $t \equiv f(a, 5)$, was nach Folgerung 3.18 (Folie 178) allgemeingültig ist.

$A_3 \equiv \exists P \forall Q[P \to (Q \wedge r) \to P \vee r]$:
: Hier wenden wir die Quantorenelimination an: Es gilt

$$\begin{aligned}
A_3 \equiv & \exists P \forall Q[P \to (Q \wedge r) \to P \vee r] \\
\models\!\!\dashv & (\forall Q[W \to (Q \wedge r) \to W \vee r]) \vee (\forall Q[F \to (Q \wedge r) \to F \vee r]) \\
\models\!\!\dashv & (\forall Q[W \to (Q \wedge r) \to W \vee r]) \vee ((F \to (W \wedge r) \to F \vee r) \wedge (F \to (F \wedge r) \to F \vee r)) \\
\models\!\!\dashv & (\forall Q[W \to (Q \wedge r) \to W \vee r]) \vee (W \wedge W) \\
\models\!\!\dashv & (\forall Q[W \to (Q \wedge r) \to W \vee r]) \vee W \\
\models\!\!\dashv & W.
\end{aligned}$$

W ist eine Tautologie, also muss A_3 ebenfalls eine Tautologie sein.

$a_4 \equiv \exists P[P]$:
: Auch hier wenden wir die Quantorenelimination an: Es gilt

$$\begin{aligned}
A_4 \equiv & \exists P[P] \\
\models\!\!\dashv & W \vee F \\
\models\!\!\dashv & W.
\end{aligned}$$

zu **Aufgabe 2:**

1. Ein einfaches Beispiel ist $A \equiv x = y$ und $t \equiv y$. Dann ist A natürlich nicht allgemeingültig, aber die Substitution $A_x[t]$ ist erlaubt und $A_x[t] \equiv y = y$ ist allgemeingültig.
2. Gegeben sei die Substitution σ aus Aufgabe 5. Wenden Sie diese Substitution auf die folgenden Terme und Formeln an:

   $A_1 \equiv (x < 3 \to p(x_1))$:
   - $\sigma(A_1) \equiv (x < 3 \to p(x + 3 \cdot x))$
   - Die Substitution ist erlaubt, weil es keine Quantoren gibt.

   $A_2 \equiv \exists x[x = 0 \vee P(x_3)]$:
   - $\sigma(A_2) \equiv \exists x[x = 0 \vee P(42)]$
   - Die Substitution ist erlaubt, da x in $\sigma(x_3)$ nicht vorkommt.

$A_3 \equiv \forall x[\neg x_1 = 0]$:

- $\sigma(A_3) \equiv \forall x[\neg x + 3 \cdot x = 0]$
- Die Substitution ist nicht erlaubt, da x innerhalb des Wirkungsbereichs des Quantors eingefügt wird.

$A_4 \equiv \forall x_1[\neg x_1 = 0] \to p$:

- $\sigma(A_4) \equiv \forall x_1[\neg x_1 = 0] \to p$
- Die Substitution ist erlaubt, da sich nichts ändert. Für x_1 muss nichts eingesetzt werden, da x_1 gebunden ist.

zu **Aufgabe 3:**

1. $\exists y \forall x\ A \models \forall x \exists y\ A$:
   Diese Aussage ist korrekt. Es sei $I = (D, I_c, I_v)$ eine Interpretation und $I \models \exists y \forall x\ A$. Dann gibt es ein $d \in D$ mit $I^{y,d} \models \forall x\ A$. Also gilt für alle $d' \in D$ $(I^{y,d})^{x,d'} \models A$.

   Ist $x \equiv y$, so ist $(I^{y,d})^{x,d'} = I^{x,d'}$. Es folgt $I^{x,d'} \models A$ für alle $d' \in D$. Insbesondere gilt $I^{x,d} \models A$. Da $x \equiv y$ gilt, folgt (wegen $(I^{x,d'})^{y,d} = I^{x,d}$) auch $(I^{x,d'})^{y,d} \models A$ für alle $d' \in D$.

   Ist dagegen $x \not\equiv y$, so ist $(I^{y,d})^{x,d'} = (I^{x,d'})^{y,d}$ für alle $d' \in D$. Also ist auch hier für alle $d' \in D$ die Interpretation $(I^{x,d'})^{y,d}$ ein Modell von A.

   In beiden Fällen gilt also $(I^{x,d'})^{y,d} \models A$ für alle $d' \in D$. Dies bedeutet aber $I^{x,d'} \models \exists y\ A$ wieder für alle d'. Daher gilt $I \models \forall x \exists y\ A$.
2. $\exists y \forall x\ A$ folgt logisch aus $\forall x \exists y\ A$
   Ob die Aussage stimmt oder nicht hängt von A ab.
   a) $A \equiv x = x$. Hier stimmt die Aussage. (klar)
   b) Mit $A \equiv x = y$ ist dagegen die Aussage falsch. (Betrachte eine Interpretation mit zweielementigem Definitionsbereich.)

   Im Allgemeinen folgt aus $\forall x \exists y\ A$ nicht logisch $\exists y \forall x\ A$. (Das „nicht“ bezieht sich auf „folgt“ und nicht auf „logisch“).
3. $\forall x\ f(x) = g(x)$ folgt $f = g$ logisch
   Da $f = g$ gar keine Formel ist, kann $f = g$ auch nicht aus $\forall x\ f(x) = g(x)$ logisch folgen.

zu **Aufgabe 4:**

$A_1 \equiv \forall x \exists P[P(x) \vee x = f(a)] \to (Q(y,z) \to \forall x \exists P[P(x) \vee x = f(a)])$:

Diese Formel entsteht aus $p \to (q \to p)$, indem p durch $\forall x \exists P[P(x) \vee x = f(a)]$ und q durch $Q(y,z)$ ersetzt wird. Diese Formel ist bekanntermaßen eine Tautologie und nach dem Tautologie-Theorem ist A_1 dann auch eine Tautologie.

$A_2 \equiv \forall x[q(x)] \to q(h(g(a, f(b)), b, f(c)))$:

Es gilt $A_2 \equiv \forall x[q(x)] \to (q(x))_x[h(g(a, f(b)), b, f(c))]$, also $\forall x[A] \to A_x[t]$ mit $A \equiv q(x)$ und $t \equiv h(g(a, f(b)), b, f(c))$. Diese Formel ist nach Folgerung 3.18 (Folie 178) allgemeingültig.

$A_3 \equiv \forall z[\neg(x = f(x) \to p(f(x))) \to (p(f(x)) \to x = f(x))]$:

$\neg(p \to q) \to (q \to p)$ ist eine aussagenlogische Tautologie. Mit dem Tautologie-Theorem ist dann auch $\neg(x = f(x) \to p(f(x))) \to (p(f(x)) \to x = f(x))$ eine Tautologie und diese ist wegen des Generalisierungstheorems logisch äquivalent zu A_3, weil z in der Formel nicht vorkommt.

$A_4 \equiv \exists P[P \to q \vee r]$:

Hier wenden wir die Quantorenelimination an: Es gilt

$$\begin{aligned} A_4 &\equiv \exists P[P \to q \vee r] \\ &\models\!\!\!\!\dashv (W \to q \vee r) \vee (F \to q \vee r) \\ &\models\!\!\!\!\dashv (W \to q \vee r) \vee W \\ &\models\!\!\!\!\dashv W. \end{aligned}$$

W ist eine Tautologie, also muss A_4 ebenfalls eine Tautologie sein.

zu **Aufgabe 5:**

$A_1 \equiv x_1 \geq x_3$:

- $\sigma(A_1) \equiv (x + 3 \cdot x) \geq 42$
- Die Substitution ist erlaubt, da kein Quantor in A_1 vorkommt.

$A_2 \equiv \forall x[x = 42 \to \neg(x_4 = 3)]$:

- $\sigma(A_2) \equiv \forall x[x = 42 \to \neg(f(a, g(b)) = 3)]$
- Die Substitution ist erlaubt, da x nicht in $\sigma(x_4)$ vorkommt.

$A_3 \equiv \exists y[f(y) = 0 \to \forall x[x \geq x_2]]$:

- $\sigma(A_3) \equiv \exists y[f(y) = 0 \to \forall x[x \geq (3 - (x + x_1))]]$
- Die Substitution ist nicht erlaubt da x in $\sigma(x_2)$ vorkommt und dieses am Ende in $\sigma(A_3)$ gebunden ist.

$A_4 \equiv p(x_1) \vee \forall x[x + 3 > x_6]$:

- $\sigma(A_4) \equiv p(x_1) \vee \forall x[x + 3 > g(y * 2)]$
- Die Substitution ist erlaubt. In $\sigma(x_1)$ kommt zwar x vor, aber es ist am Ende nicht im Wirkungsbereich des Quantors.

$A_5 \equiv \forall x[x_5 = 5 \to x > 3]$:

- $\sigma(A_5) \equiv \forall x[(if\ (x > 3)\ then\ 5\ else\ 3) = 5 \to x > 3]$
- Die Substitution ist nicht erlaubt, x kommt in $\sigma(x_5)$ vor.

$A_6 \equiv x_3 < x_4 \vee \forall y[p(y) \vee y = 3]$:

- $\sigma(A_6) \equiv 42 < f(a, g(b)) \vee \forall y[p(y) \vee y = 3]$
- Die Subsituition ist erlaubt, es wird nur außerhalb des Quantors ersetzt.

$A_7 \equiv \forall x_3[x_3 = 42]$:

- $\sigma(A_7) \equiv \forall x_3[x_3 = 42]$
- Die Subsituition ist erlaubt, da hier keine freie Variable vorkommt, also gar nichts ersetzt wird.

zu **Aufgabe 6:** Gesucht ist ein Verfahren, das entscheidet, ob eine Formel in Gleichheitslogik eine Tautologie ist oder nicht. Das generelle Problem bei solchen Entscheidungsverfahren für die Prädikatenlogik ist die unendliche Anzahl der Interpretationen, die man dazu theoretisch überprüfen müsste. In der Aussagenlogik war es noch möglich (wenn auch mit erheblichem Aufwand verbunden), eine Wertetabelle zu erstellen, in der alle Bewertungen aufgeführt sind und an der man dann erkennen kann, ob die Formel allgemeingültig, erfüllbar oder unerfüllbar ist. Dies ist in der Prädikatenlogik nicht mehr möglich, da es zum Einen unendlich große und damit auch unendlich viele verschiedene Definitionsbereiche geben kann und da es zum Anderen bei Formeln mit Variablen auch potentiell unendlich viele Möglichkeiten gibt, Elemente für die Variablen einzusetzen. Generell gibt es dadurch also unendlich viele verschiedene Interpretationen, die man nicht mehr einfach in eine Tabelle schreiben kann.

Wir haben allerdings auch schon ein Beispiel gesehen, bei dem man dieses Problem umgehen kann: Bei der quantifizierten Aussagenlogik gibt es tatsächlich für jede Variable bzw. Konstante nur zwei Möglichkeiten, Werte einzusetzen. Dadurch ist es gar nicht sinnvoll, größere, unendliche Definitionsbereiche zu betrachten, da andere Werte als die 0 und 1 gar keine Rolle spielen können. Wenn aber nur endlich große Definitionsbereiche betrachtet werden müssen, ist sofort klar, dass man wieder mit einfachen Fallunterscheidungen arbeiten kann, um einen Tautologietest zu implementieren. Man könnte eine Tabelle bauen, mit der Quantorenelimination steht aber ein Verfahren zur Verbügung, das diese Falluntescheidungen auf der syntaktischen Ebene durchführt.

Im hier gefragten Fall der Gleichheitslogik ist es ganz ähnlich: Da es keine Funktions- oder Prädikatssymbole gibt, kann man nur Aussagen über die Gleichheit oder Ungleichheit von Elementen formulieren. Insbesondere ist es nicht möglich, Aussagen zu formulieren, die einen Definitionsbereich mit mehr Elementen erfordern, als Variablen in der Formel vorkommen. Um einen unendlichen Definitionsbereich zu erzwingen, müsste man z.B. so etwas wie $\forall x \exists y \, [x < y]$ haben. In dieser Formel kommt aber eine Prädikatskonstante vor, dies ist also keine Formel der reinen Gleichheitslogik.

Hat man also eine erfüllbare Formel mit n Variablen, dann gibt es auch ein Modell für diese Formel, dessen Definitionsbereich höchstens n Elemente hat. Die Formel kann also einfach auf Erfüllbarkeit getestet werden, indem man sie nacheinander unter Interpretationen mit $1, 2, \ldots, n$ Elementen auswertet. Wird sie auch von der letzten Interpretation nicht erfüllt, dann gibt es auch kein Modell. Der gesuchte Tautologietest besteht nun darin, die jeweilige Formel zunächst zu negieren und dann wie eben beschrieben auf Erfüllbarkeit zu testen.