

1 Das deduktive System F_0

1.1 Axiome und Regeln

$$Ax1: A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$Ax2: (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$Ax3: (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$MP: \frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

1.2 Deduktionstheorem

$$\Sigma, A \vdash_{F_0} B \text{ gdw. } \Sigma \vdash_{F_0} (A \rightarrow B)$$

1.3 Theoreme

$$1: \vdash_{F_0} (A \rightarrow A)$$

$$2: (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash_{F_0} (A \rightarrow C)$$

$$3: \vdash_{F_0} \neg\neg A \rightarrow A$$

$$4: \vdash_{F_0} (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$5: \vdash_{F_0} (B \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A))$$

$$6: \vdash_{F_0} (\neg B \rightarrow (B \rightarrow A))$$

$$7: \vdash_{F_0} (B \rightarrow \neg\neg B)$$

$$8: \vdash_{F_0} (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \text{ und}$$

$$\vdash_{F_0} (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$9: \vdash_{F_0} (B \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg(B \rightarrow C)))$$

$$10: \vdash_{F_0} ((B \rightarrow A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow A))$$

$$11: \vdash_{F_0} ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$$

2 Gentzen-Sequenzenkalkül

2.1 Axiome und Regeln

$$Ax1 : \quad \Gamma, A \vdash_G A, \Delta$$

$$Ax2 : \quad \Gamma, A, \neg A \vdash_G \Delta$$

$$Ax3 : \quad \Gamma \vdash_G A, \neg A, \Delta$$

$$R_{\wedge, \vee} : \quad \frac{\Gamma, A, B \vdash_G \Delta}{\Gamma, (A \wedge B) \vdash_G \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_G A, B, \Delta}{\Gamma \vdash_G, (A \vee B), \Delta}$$

$$R_{\rightarrow} : \quad \frac{\Gamma, A \vdash_G \Delta, B}{\Gamma \vdash_G (A \rightarrow B), \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_G A, \Delta; \quad \Gamma, B \vdash_G \Delta}{\Gamma, (A \rightarrow B) \vdash_G \Delta}$$

$$R_{\neg} : \quad \frac{\Gamma, A \vdash_G \Delta}{\Gamma \vdash_G \neg A, \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_G A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash_G \Delta}$$

$$R_{\wedge', \vee'} : \quad \frac{\Gamma \vdash_G A, \Delta; \quad \Gamma \vdash_G B, \Delta}{\Gamma \vdash_G (A \wedge B), \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash_G \Delta; \quad \Gamma, B \vdash_G \Delta}{\Gamma, (A \vee B) \vdash_G \Delta}$$

3 Hilbertkalkül

3.1 Regeln

Konjunktion: $\wedge _I : \frac{A, B}{A \wedge B}$

$$\wedge _E : \frac{A \wedge B}{A}$$

Disjunktion: $\vee _I : \frac{A}{A \vee B}$

$$\vee _E : \frac{A \vee B, \neg A}{B}$$

Implikation: $\rightarrow _E : \frac{A, A \rightarrow B}{B}$ (Modus-Ponens)

$$\rightarrow _E : \frac{\neg B, A \rightarrow B}{\neg A}$$
 (Modus-Tollens)

Negation: $\neg _E : \frac{A, \neg A}{B}$

$$\neg _E : \frac{\neg \neg A}{A}$$

Äquivalenz: $\leftrightarrow _E : \frac{A \leftrightarrow B}{A \rightarrow B}$

$$\leftrightarrow _E : \frac{A \leftrightarrow B}{B \rightarrow A}$$

Transitivität: $\leftrightarrow _I : \frac{A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C}{A \leftrightarrow C}$

Deduktionstheorem: $\rightarrow _I : \frac{A_1, \dots, A_n, B \vdash_H C}{A_1, \dots, A_n \vdash_H B \rightarrow C}$

Reductio ad absurdum: $\neg _I : \frac{A_1, \dots, A_n, B \vdash_H C, A_1, \dots, A_n, B \vdash_H \neg C}{A_1, \dots, A_n \vdash_H \neg B}$

Hypothetischer Syllogismus: $\frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$

Konstruktives Dilemma: $\frac{A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C}{B \vee D}$

3.2 Beweistechniken

Oft kommt die Frage auf, wie man eigentlich Beweise in Kalkülen findet. Eine generelle Vorgehensweise gibt es dafür nicht, letztlich ist es Übungssache. Techniken, die zum Erfolg führen können, orientieren sich aber häufig an unserer natürlichen Art zu beweisen. In einigen Fällen ist es nützlich, die herzuleitende Formel zuerst hinzuschreiben und den Beweis gewissermaßen rückwärts zu führen. Man sucht also eine oder mehrere andere Formeln, aus der die gewünschte Formel durch Anwendung einer Regel hervorgeht. Dies sind die Voraussetzungen, die gelten müssen, damit die zu beweisende Formel gilt. Falls diese Voraussetzungen keine Axiome oder Prämissen sind, müssen sie nun natürlich selbst gezeigt werden, so lange bis nur noch Axiome oder Prämissen vorliegen. Diese Methode kommt nicht nur in Kalkülen bzw. Theorembeweisern zur Anwendung, sondern ist die zentrale Idee hinter allen Verfahren, die wir im Laufe der Vorlesung kennenlernen. Bei semantischen Tableaux ist z.B. eine Formel erfüllbar, wenn es einen vollständigen, offenen Ast unterhalb dieser Formel gibt. Es ist jedoch nicht trivial, die „richtigen“ Voraussetzungen zu finden, die zum Ziel führen und mit denen der Beweis möglichst kurz wird.

Auch Menschen zerlegen Aussagen in Beweisverpflichtungen, die sie dann jede für sich zeigen, bis nur noch triviale Aussagen zu beweisen sind. Dies wird z.B. immer dann deutlich, wenn zunächst Lemmata bewiesen werden, aus denen dann am Ende ein Theorem gefolgert wird. Wer sich dann fragt, wie man eigentlich auf solche Beweise kommt, der sollte sich den Beweis vom Ende her anschauen. Auch hinter vermeintlich komplexen Beweistechniken wie z.B. vollständiger Induktion steckt nichts anderes als eine Zerlegung in Beweisverpflichtungen: Einerseits muss gezeigt werden, dass die Aussage für $n = 0$ gilt und andererseits, dass aus der Gültigkeit für n auch die Gültigkeit für $n + 1$ folgt. Auch Induktionsprinzipien kann man in Form von Regeln in Kalkülen ausdrücken.

Eine andere häufig verwendete Beweistechnik ist der indirekte oder Widerspruchsbeweis. Diese Technik sollte jedem z.B. aus Mathematikvorlesungen bekannt sein: Man nimmt an, dass das Gegenteil der zu zeigenden Aussage gilt und folgert daraus etwas widersprüchliches. Auch diese Idee steckt in unseren Methoden, Tautologien nachzuweisen bzw. in der schon vom Anfang der Vorlesung bekannten Aussage $\Sigma \models A$ gdw. $\Sigma \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar. In den Übungen wurde bereits gezeigt, dass dieses Prinzip für Kalküle (\mathcal{F}_0) gilt und es wird z.B. durch Regeln wie die Reductio ad Absurdum im Hilbertkalkül bzw. Theorem 11 für \mathcal{F}_0 formalisiert. Ein Widerspruchsbeweis für $\vdash_H A \rightarrow A$ könnte bspw.

folgendermaßen aussehen:

$A_1 \equiv \neg(A \rightarrow A)$	Prämisse
$A_2 \equiv \neg(\neg A \vee A)$	Implikationsgesetz
$A_3 \equiv \neg\neg A \wedge \neg A$	de Morgan
$A_4 \equiv A \wedge \neg A$	Doppelnegation
$A_5 \equiv A$	\wedge_E
$A_6 \equiv \neg A \wedge A$	Kommutativität
$A_7 \equiv \neg A$	\wedge_E

An dieser Stelle ist gezeigt, dass $\neg(A \rightarrow A) \vdash_H A$ und $\neg(A \rightarrow A) \vdash_H \neg A$ gilt. Mit der Reductio ad Absurdum gilt nun $\vdash_H \neg\neg(A \rightarrow A)$, woraus in einem weiteren Schritt $A \rightarrow A$ hergeleitet werden kann. Ganz ähnlich läuft solch ein Beweis in \mathcal{F}_0 ab, dort kann man z.B. $\neg(A \rightarrow A) \vdash_{\mathcal{F}_0} A \rightarrow A$ zeigen und muss dann, um Theorem 11 anwenden zu können, noch etwas mit dem Deduktionstheorem herumspielen.

Etwas komplizierter wird es, wenn man mit dem Hilbertkalkül z.B. $\vdash_H \neg(A \leftrightarrow \neg A)$ nachweisen möchte. Man kann relativ leicht $A \leftrightarrow \neg A \vdash_H A \vee A$ und $A \leftrightarrow \neg A \vdash_H \neg A \vee \neg A$ zeigen und muss jetzt noch zusätzlich $A \vee A \vdash_H A$ herleiten, bevor man die Reductio ad Absurdum anwenden kann. Letzterer Beweis ist selbst wieder relativ einfach als Widerspruchsbeweis zu führen.