Übungsklausur

Jan Bormann

16. September 2011

Aufgabe 1

a)

Finde eine Formel der Prädikatenlogik, sodass beim Anwenden der Tableauxmethode nach Vorlesung weder ein vollständiger Baum noch eine lineare Liste entsteht

b)

Finde eine Formel der Prädikatenlogik, sodass beim Anwenden der Resolutionsmethode nach Vorlesung jede Klausel genau einmal benutzt wird und jede Klausel mindestens drei Literale enthält.

c)

Finde eine Formel der Aussagenlogik, sodass beim Anwenden der Davis-Puttnam-Methode nach Vorlesung jede Regel genau zwei Mal angewendet wird und keine Regel zweimal hintereinander.

Aufgabe 2

Sei G wie folgt definiert

1. $\forall p \in \mathrm{V} : p \in \mathrm{G}$ und $\neg p \in \mathrm{G}$
2. $A \in \mathrm{G}$ und $B \in G \rightarrow (A \vee B) \in \mathrm{G}$
3. G ist die kleinste Menge die 1. und 2. erfüllt

Zeigen oder widerlegen Sie: $\forall A \in \mathrm{F} : \exists B \in \mathrm{G} : A \vDash B$

Aufgabe 3

Sei H wie folgt definiert

1. $\forall p \in \mathrm{V} : \neg p \in \mathrm{H}$
2. $A \in \mathrm{H}$ und $B \in \mathrm{H} \rightarrow (A \vee B) \in \mathrm{H}$ und $(A \wedge B) \in \mathrm{H}$
3. H ist die kleinste Menge die 1. und 2. erfüllt

a)

Zeigen oder widerlegen Sie: $\forall A \in \mathrm{F}(\{\vee, \wedge\} : \exists B \in \mathrm{H} : \forall \varphi : \varphi(A) + \varphi(B) = 1$

b)

Zeigen Sie, dass $\forall A \in \mathrm{F} : \exists B \in \mathrm{H} : A \vDash B$ nicht gelten kann

c)

Zeigen oder widerlegen Sie: $\exists A \in \mathrm{F}(\{\vee, \wedge\} : \exists B \in \mathrm{H} : \exists \varphi : \varphi(A) + \varphi(B) = 2$

d)

Zeigen oder widerlegen Sie:

$$\exists A \in \mathrm{F}(\{\wedge\}) : \exists B \in (\mathrm{H} \cap \mathrm{F}(\{\neg, \wedge\}) : \exists \varphi : \varphi(A) + \varphi(B) = 2$$

Aufgabe 4

Teil 1

a)

Zeigen Sie durch struktuelle Induktion, jede Formel in $\mathrm{F}(\{\wedge, \leftrightarrow\})$ ist erfüllbar.

b)

Folgern Sie aus Aufgabenteil a), dass $\{\wedge, \leftrightarrow\}$ keine vollständige Operatorenmenge ist.

Teil 2

- $\ominus$ ist ein einstelliger Operator, mit
$$\varphi(\ominus(A)) := 0$$
- $\oplus$ ist ein einstelliger Operator, mit
$$\varphi(\oplus(A)) := 1$$
- $\hookrightarrow$ ist ein dreistelliger Operator, mit
$$\varphi(\hookrightarrow (A, B, C)) := \begin{cases} \varphi(B) & \text{falls } \varphi(A) = 1 \\ \varphi(C) & \text{falls } \varphi(A) = 0 \end{cases}$$
- $\circledast$ ist ein zweistelliger Operator, mit
$$\varphi(\circledast(A, B)) = 1 \text{ gdw } \varphi(A) = 1 - \varphi(B)$$
- $\oslash$ ist ein zweistelliger Operator, mit
$$\varphi(\oslash(A, B)) = 1 \text{ gdw } \varphi(A) = \varphi(B) = 0$$

- $\odot$ ist ein zweistelliger Operator, mit

$$\varphi(\odot(A, B)) = 1 \text{ gdw } \min(\varphi(A), \varphi(B)) = 0$$

Prüfen Sie jeweils ob die jeweilige Operatorenmenge vollständig ist und beweisen sie ihre Behauptung.

1. $\{\vee, \ominus\}$
2. $\{\vee, \ominus, \oplus\}$
3. $\{\ominus, \circledast\}$
4. $\{\neg, \circledast\}$
5. $\{\oplus, \circledast\}$
6. $\{\neg, \circledast, \hookrightarrow\}$
7. $\{\rightarrow, \ominus\}$
8. $\{\odot\}$
9. $\{\oslash\}$
10. $\{\leftrightarrow, \ominus, \wedge\}$

Aufgabe 5

Seien $\oplus$ und $\ominus$ wie in Aufgabe 3 definiert. Ferner Sei $M_1 := \{\vee, \wedge\}$ und $M_2 := M_1 \cup \{\ominus, \oplus\}$

a)

Zeigen Sie, dass M_1 keine vollständige Operatorenmenge ist.

b)

Zeigen Sie,

$\forall A \in \mathrm{F}(M_2) : \exists B \in \mathrm{F}(M_1) : [\forall \varphi : \varphi(A) = \varphi(B)] \vee [\forall \varphi : \varphi(A) = 0] \vee [\forall \varphi : \varphi(A) = 1]$

c)

Folgern Sie aus der b) etwas über die Anzahl der boolschen Funktion die man mit Formlen aus $\mathrm{F}(M_2)$ darstellen kann.

d)

Zeigen Sie, $\exists \varphi_0, \varphi_1 : \forall A \in \mathrm{F}(M_2) : \varphi_0(A) \neq 0 \vee \varphi_1(A) \neq 1$

e)

Zeigen Sie, dass M_2 keine vollständige Operatorenmenge ist.

Aufgabe 6

Seien $\Sigma \subset \mathrm{F}$ und $A, B \in \mathrm{F}$. Zeigen oder widerlegen sie folgende Behauptungen

1. $\Sigma \cup \{\mathrm{A}\} \models \mathrm{B}$ gdw $\Sigma \cup \{\mathrm{B}\} \models \mathrm{A}$
2. $\Sigma \cup \{\neg\mathrm{A}\} \models \mathrm{B}$ gdw $\Sigma \cup \{\neg\mathrm{B}\} \models \mathrm{A}$
3. $\Sigma \cup \{\neg\mathrm{A}\} \models \mathrm{B}$ gdw $\Sigma \cup \{\mathrm{A}\} \models \neg\mathrm{B}$
4. $\Sigma \cup \{\neg\mathrm{A}\} \models \neg\mathrm{B}$ gdw $\Sigma \cup \{\mathrm{B}\} \models \mathrm{A}$

Aufgabe 7

Sei $A_0, A_1, A_2 \ldots$ eine Aufzählung von F um folgende rekursive Definition zu erlauben

$$\Gamma_0 := \{\},\ \Gamma_{i+1} := \begin{cases} \Gamma_i \cup \{A_i\} & \text{falls } \Gamma_i \cup \{A_i\} \not\models p \wedge \neg p \\ \Gamma_i \cup \{\neg A_i\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{mit } i \geq 0,\ p \in V \text{ und } \Gamma := \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i$$

Zeigen oder widerlegen Sie: Γ ist erfüllbar.

Aufgabe 8

Sei $A_0, A_1, A_2 \ldots$ eine Aufzählung von F um folgende rekursive Definition zu erlauben

$$\Gamma_0 := \{A_0\},\ \Gamma_{i+1} := \begin{cases} \Gamma_i \cup \{A_{i+1}\} & \text{falls } \Gamma_i \not\models A_{i+1} \\ \Gamma_i \cup \{\neg A_{i+1}\} & \text{falls } \Gamma_i \models A_{i+1} \end{cases} \text{mit } i \geq 0$$

$$\text{und } \Gamma := \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i$$

Zeigen oder widerlegen Sie: Γ ist erfüllbar.

Aufgabe 9

Zeigen Sie, von jeder Formel dass Sie eine Tautologie ist mit genau einer Methode. Verwenden Sie jeweils genau einmal, das Semantische Tableaux, Semantik der Aussagenlogik, F_0, das Hilbertkalkühl und Gentzen-Sequenzen.

1. $A_1 \equiv q_1 \to (q_2 \to (q_3 \to (q_4 \to q_4)))$
2. $A_2 \equiv ((\neg q_1 \wedge q_2) \vee (q_3 \wedge q_4 \wedge \neg q_5)) \to (\neg q_5 \wedge q_2)$
3. $A_3 \equiv \neg q_1 \to ((q_1 \vee q_2) \to (\neg q_1 \wedge q_2))$
4. $A_4 \equiv ((q_1 \to q_2) \to q_3) \to (q_3 \vee q_2)$
5. $A_5 \equiv (q_1 \wedge (q_2 \vee q_3) \to (q_4 \to (q_1 \vee q_2))$

Aufgabe 10

Welche Aussagen sind richtig und welche falsch ?

1. In einem korrekten und vollständigen deduktiven System der Aussagenlogik gilt
   (a) kann man für jedes Theorem beliebig viele Beweise finden
   (b) Gibt es für jede Tautologie einen endlichen Beweis
   (c) gibt es mindestens ein Axiom
   (d) ist jede Tautologie ein Axiom
   (e) ist jedes Theorem eine Tautologie.
   (f) Gibt es für jede Tautologie einen beliebig langen Beweis
2. Zwei deduktive Systeme aussagenlogischer Formeln F und F' sind äquivalent,
   (a) wenn sie dieselben Axiome haben
   (b) wenn beide Systeme korrekt und vollständig sind.
   (c) wenn für jede Regel $\frac{A_1, A_2, \ldots A_l}{A}$ aus F gilt $A_1, A_2, \ldots A_l \vdash_{F'} A$
   (d) wenn für jede Regel $\frac{A_1, A_2, \ldots A_l}{A}$ aus F' gilt $A_1, A_2, \ldots A_l \vdash_F A$
   (e) wenn für jede Regel $\frac{A_1, A_2, \ldots A_l}{A}$ aus F gilt $A_1, A_2, \ldots A_l \vdash_{F'} A$ und wenn für jede Regel $\frac{A_1, A_2, \ldots A_l}{A}$ aus F' gilt $A_1, A_2, \ldots A_l \vdash_F A$
   (f) wenn sie dieselben Theoreme erzeugen

Aufgabe 10

Überprüfe ob die Formeln Tautolgien sind mittels Davis-Putnam:

1. $((\neg A \land \neg B) \lor (\neg B \leftrightarrow C)) \to (((\neg A \land \neg B) \lor (B \leftrightarrow \neg C)) \to \neg(A \lor B))$
2. $((A \lor B) \land (\neg A \lor B) \land (\neg B \lor C) \land (\neg C \lor A) \land (\neg B \lor \neg A))$
   $\to ((A \lor B) \land (\neg A \lor C) \to (B \lor C))$
3. $(\neg B \land \neg C \land \neg D) \lor (\neg B \land \neg C \land \neg D \land E) \lor D$
   $\lor(\neg A \land \neg B \land \neg C) \lor (\neg B \land C) \lor (C \land E) \lor (\neg E \land B) \lor (\neg C \land E)$
4. $A \to ((((B \to C) \to D) \land (\neg A \lor B)) \lor (B \to \neg D))$
5. $\neg[(\neg B \lor A) \land (A \lor \neg C) \land (\neg A \lor \neg C)$
   $\land(B \lor \neg C) \land (\neg D \lor C) \land (B \lor D \lor C) \land (\neg B \lor C)]$

Aufgabe 12

a)

Finde ein Model für folgende Formel

$$\forall x : [(x * x) * x = x \land \exists y : \neg(x = y)]$$

b)

Finde ein Model für die zwei folgenden Formeln

- $\forall x : \neg(x * x)$
- $\forall x : \forall y : (x * y) \vee (y * x) \vee (x = y)$

c)

Finde ein Model für die drei folgenden Formeln

- $\forall x : ((((((x * x) * x) * x) * x) * x) * x = x)$
- $\exists x : \neg(((((x * x) * x) * x) * x) * x = x)$
- $\forall x : \forall y : \forall z : (\neg(x = y) \wedge \neg(x = x * y) \wedge \neg(y = y * x)) \rightarrow ((x * y) * z = z)$

d)

Finde ein Model für die vier folgenden Formeln

- $\forall x : \neg(x * x)$
- $\forall x : \forall y : (x * y) \vee (y * x) \vee (x = y)$
- $\forall x : \exists y : (x * y)$
- $\forall x : \forall y : \forall z : (\neg(x * y) \vee \neg(y * z) \vee (x * z))$

e)

Finde ein Model für die fünf folgenden Formeln

- $\forall x : \neg(x * x)$
- $(a * b)$
- $\forall x : [(\neg(x = a) \wedge \neg(x = b)) \rightarrow ((a * x) \wedge (x * b))]$
- $\exists x_1 : \exists x_2 : \neg(x_1 * x_2) \wedge \neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_2 * x_1)$
- $\forall x : \forall y : \forall z : (\neg(x * y) \vee \neg(y * z) \vee (x * z))$

f)

Finde ein Model für die sechs folgenden Formeln

- $\forall x : \neg(x * x)$
- $\forall x : \exists y : (x * y) \wedge [\forall z : \neg(z = y) \rightarrow \neg(z * x)]$
- $\exists x_1 : \cdots \exists x_{17} : \bigwedge_{i=1}^{16} \neg(\bigvee_{j=i+1}^{17} x_i = x_{i+1})$
- $\forall x : \forall y : (x * y) \rightarrow (y * x)$
- $\forall x : \forall y : (y * x) \rightarrow (x * y)$
- $\forall x_1 \cdots \forall x_{23} : \bigvee_{i=1}^{22} \bigvee_{j=i+1}^{23} (x_i = x_{i+1})$

Aufgabe 13

Prüfe jeweils ob es ein MGU gibt und berechne ihn ggf.

1. $S^1 = \{p(x, f(x, y), g(y)); p(g(y), f(w, z), w)\}$
2. $S^2 = \{q(v, w, x, y, z, u); q(h_3(u), h_2(v), h_1(w), g_1(x), g_2(y), g_3(z))\}$
3. $S^3 = \{p_1(g(x_1), x_2, x_3, x_4, x_5); p_2(y_1, f(y_1), g(x_2), h(x_3), w))\}$
4. $S^4 = \{f(g_1(u), g_2(v), g_3(w), g_4(x), g_5(y), g_6(z)); f(v, w, x, y, z, g_6(g_5(y)))\}$
5. $S^5 = \{q(x_1, g(x_1), h(x_3)); q(f(x_2, a), x_3, x_4)\}$

Aufgabe 14

Überprüfe ob es sich um Allgemeingültige Formeln handelt mittles Tableau

1. $\forall y[(\exists x[\neg p(x, y)] \vee \forall z[\neg q(y, z)]) \vee (\neg(\exists u[q(y, u)]) \rightarrow \exists u[\neg p(u, y)])]$
2. $\forall z[[[q(z) \wedge p_1(a, f(z))] \rightarrow [q(z) \vee p_1(a, f(z))]] \wedge \neg(\forall x[p_2(x)] \vee \forall y[\neg p_2(y)])]$
3. $\forall x : \exists y : \forall z : [(\forall y : p_1(x, y)) \rightarrow$
   $(((p_2(z) \rightarrow (\exists x : p_3(x, y)) \rightarrow (\forall y : \exists x : p_4(x, y)))$
   $\wedge((\exists y : \neg p_1(x, y)) \vee (p_2(z)))) \vee ((p_2(z)) \rightarrow (\exists y : \forall x : \neg p_4(x, y))))]$
4. $\forall x\neg[(\neg p_1(x) \vee p_2(x)) \wedge (p_2(x) \vee \neg p_3(x)) \wedge (\neg p_2(x) \vee \neg p_3(x)) \wedge (p_1(x)$
   $\vee\neg p_3(x)) \wedge (\neg p_4(x) \vee p_3(x)) \wedge (p_1(x) \vee p_4(x) \vee p_3(x)) \wedge (\neg p_1(x) \vee p_3(x))]$

Aufgabe 15

Bestimme die Klauselform folgender Formeln

1. $p(x_2, x_1) \vee \neg\exists x_2[q(x_2) \wedge \forall x_3[q(x_3) \vee p(x_3, x_2)]]$
2. $\forall x_1[p(x_1, x_2) \vee \forall x_1[q(x_1) \rightarrow \exists x_2[p(x_1, x_2)]] \vee q(x_3)]$
3. $\forall x_4[\exists x_1[\forall x_2[q(x_1, x_2)] \rightarrow [p(x_1) \vee p(x_3)] \rightarrow \exists x_2[p(x_2) \vee p(x_4)]]]$

Aufgabe 16

Überprüfe ob es sich um Allgemeingültige Formeln handelt mittles Resolution

1. $\neg[\forall x\forall y\{(p(x, a) \vee \neg q(b, y)) \wedge (\neg p(f(x), x) \vee \neg q(y, x)) \wedge q(x, y)\}]$
2. $\exists y[(\exists x[\neg p(x, y)] \wedge \forall z[\neg q(y, z)]) \vee (\neg(\exists u[q(y, u)]) \rightarrow \exists u[\neg p(u, y)])]$
3. $\exists z[[[q(z) \wedge p_1(a, f(z))] \rightarrow [q(z) \vee p_1(a, f(z))]] \wedge \neg(\forall x[p_2(x)] \vee \forall y[\neg p_2(y)])]$
4. $\exists x[p(x) \rightarrow (((q(x) \rightarrow r(x) \rightarrow s(x)) \wedge (\neg p(x) \vee q(x))) \vee (q(x) \rightarrow \neg s(x)))]$
5. $\neg\forall x[(\neg p(x) \vee r(x)) \wedge (r(x) \vee \neg q(x)) \wedge (\neg r(x) \vee \neg q(x))$
   $\wedge(p(x) \vee \neg q(x)) \wedge (\neg s(x) \vee q(x)) \wedge (p(x) \vee s(x) \vee q(x)) \wedge (\neg p(x) \vee q(x))]$

Aufgabe 17

Zeige oder Widerlege ohne Verwendung von Tableaux, Resolution oder einem Deduktiven System der PL folgende Aussagen

1. $\models \forall P \exists Q [P \leftrightarrow Q]$
2. $\forall x[p(x) \wedge q(x)] \quad |{=}| \quad \forall x[p(x)] \wedge \forall x[q(x)]$
3. $\forall x[p(a) \vee q(x)] \quad |{=}| \quad p(a) \vee \forall x[q(x)]$
4. $\exists x[p(x) \vee q(x)] \quad |{=}| \quad \exists x[p(x)] \vee \exists[q(x)]$
5. $\exists x[p(x) \wedge q(x)] \quad |{=}| \quad \exists x[p(x)] \wedge \exists[q(x)]$
6. $\models \exists x[p(x) \wedge q(x)]$ gdw $\models \exists x[p(x)] \wedge \exists[q(x)]$
7. $\models \exists x[p(x) \wedge q(x)] \rightarrow (\exists x : [p(x)] \wedge \exists x : [q(x)])$
8. $\forall x[p(x) \wedge q(x) \rightarrow Q] \quad |{=}| \quad \forall x[\neg Q \rightarrow p(x)] \vee \forall[\neg Q \rightarrow q(x)]$

Aufgabe 18

1. Gebe ein Herbrand-Model für

   $$(\exists x[\neg p(x,a)] \wedge [\neg q(a,z)]) \vee (\neg(\exists u[q(a,u)]) \rightarrow [\neg p(f(u),a)])$$

   an.

2. Gebe eine erfüllbare Formel an, welche keine Gleichheit benutzt und für die es kein Herbrand-Modell gibt.

Aufgabe 19

Konstruiere ein minimales Modell mittels Tableaux für folgende Formel

$$\exists x, y, w : \neg(x = y) \wedge \neg(w = y)$$

Aufgabe 20

Zeige oder Widerlege folgende Behauptung. Sei A eine erfüllbare Formel der Prädikatenlogik 1. Stufe, dann gilt: Es gibt eine Interpretation $I = (D, I_c, I_v)$ mit $I(A) = 1$, sodass es eine Surjektion von $\mathbb{N}$ nach D gibt.

Aufgabe 21

Sei $I = (D, I_c, I_v)$ mit

- $D = \mathbb{N}$
- $I_c(t)(d_1, d_2) = 1$ gdw $d_1 | d_2$
- $I_c(u)(d) = 1$ gdw $d \bmod 2 = 1$

- $I_c(<) = <_{\mathbb{N}}$
- $I_c(p)(d) = 1$ gdw d ist Prime

Bestimme

- $I(\exists x : (\neg u(x)) \to p(x))$
- $I(\forall y\{p(y) \to \forall x[<(x,y) \to \neg t(x,y)]\})$

Aufgabe 22

a)

Gebe eine Formel A_n^m der Prädikatenlogik 1. Stufe ohne Verwendung von Gleichheit an, sodass für alle ihre Modelle $I = (D, I_c, I_v)$ gilt, dass $n <= |D| <= m$ ist.

b)

Begründe warum es keine Formel A der Prädikatenlogik 1. Stufe geben kann, deren Modelle alle einen endlichen Definitionbereich haben.

c)

Gebe eine Formel A_∞ der Prädikatenlogik 1. Stufe ohne Verwendung von Gleicheit an, sodass für alle ihre Modelle $I = (D, I_c, I_v)$ gilt, dass $\infty = |D|$ ist.

d)

Gebe eine Formel der PL-1 an, welche sowohl endlich als auch unendliche aber keine beliebig großen Modell hat. $(|D| = \infty \vee \exists n \in \mathbb{N} : |D| < n)$

e)

Zeigen, dass wenn eine Formel A der PL-1 beliebig große Modelle hat, dann hat sie auch ein unendliches Modell. (Tipp verwende den Kompaktheitssatz)

f)

Gebe eine Formel B_2 der PL-1 an, deren Modelle endlich sind und eine gerade Anzahl von Elementen enthalten.

g)

Skiziere ein Verfahren wie man B_n der PL-1 erhalten kann, deren Modelle endlich sind und Vielfache von n als Elemente enthalten

h)

Gebe eine Menge Σ_n mit n+1 Formeln der PL-1 an, welche unerfüllbar ist, aber jede ihre Teilmengen ist erfüllbar. (Tipp die Teilmengen sind nur mit endlichen Modellen erfüllbar.)

Aufgabe 23

a)

Was besagt der Kompaktheitssatz

b)

Beweise ihn für die Aussagenlogik

c)

Widerlege ihn für die Prädikatenlogik (2. Stufe).

Aufgabe 24

a)

Seien T, S Theorien über Sprachen der PL-1.

Wahr	Falsch	Aussage
□	□	Jede Teilmenge von T ist erfüllbar
□	□	$T \subseteqq S$ und S vollständig, dann ist T erfüllbar
□	□	Falls T vollständig und $T \subsetneqq S$ ist, dann ist S inkonsistent
□	□	Wenn T inkonsistent, dann ist T unerfüllbar
□	□	$T \subseteqq S$ und T vollständig und S erfüllbar, dann gilt T = S
□	□	$T \subseteqq S$ und S konsistent, dann ist T erfüllbar
□	□	$T \subseteqq S$ und ist S rekursiv axiomatisierbar, dann ist T rekursiv axiomatisierbar

b)

Sei S eine Menge von Formeln der PL-1. Sei T_S die von S erzeugte Theorie.

Wahr	Falsch	Aussage
□	□	T_S ist endlich axiomatisierbar
□	□	Ist R eine Struktur, die S erfüllt, so ist $T_S \cup T_R$ vollständig
□	□	Wenn S erfüllbar ist, dann ist T_S konsistent
□	□	S ist konsistent genau dann, wenn T_S vollständig

Aufgabe 25

a)

Sei Σ eine Menge von Formeln und T_Σ die von Σ erzeugte Theorie. Zeige oder Widerlege:

Ist T_Σ vollständig, so ist T_Σ entscheidbar.

b)

Sei T eine vollständige Theorie mit $T \not\models \bar{\text{A}}$, wobei $\bar{\text{A}}$ der existenzieller Abschluss von A ist, dann folgt das $\neg(B \wedge A) \in T$ für alle $B \in$ Form.

Aufgabe 26

a)

Zeige folgende Aussagen:

- $\vdash_{\mathcal{F}} (y = a) \to [\forall x : (p(a) \to p(x)) \to (p(y) \to \forall z : \forall y : p(y))]$
- $\forall x : \neg p(x) \to \neg \forall x : p(x), \forall x : p(x) \vdash_{\mathcal{F}} \neg \forall x : \neg p(x)$
- $\forall x : p(x) \vdash_{\mathcal{F}} \neg \forall x : \neg p(x)$

b)

Welche der folgendenen Formeln sind Axiome des deduktiven Systems $\mathcal{F}$ der Prädikatenlogik erster Stufe

Wahr	Falsch	Formel
□	□	$\forall x : p(x) \to p(a)$
□	□	$\forall x : f(x, a) = f(x, a)$
□	□	$\forall x : ((p(a) \to q(b)) \to (\neg q(b) \to \neg p(a)))$
□	□	$\forall x[p(x) \to \forall x : p(x)]$
□	□	$\forall x \forall y : (x = z \to (p(x) = p(z))$
□	□	$\forall x[p(a) \to q(x)] \to [p(a) \to \forall x : q(x)]$
□	□	$p(a) \to \forall y : p(a)$
□	□	$\forall x(p(x) \to q(x)) \to (\forall p(x) \to \forall q(x))$
□	□	$\forall x : (x = z \to (p(x) = p(x))$
□	□	$\forall x : ((\neg q(b) \to \neg p(a)) \to (p(a) \to q(b)))$

Aufgabe 27

Seien A_1, A_2 Klauseln der Pl-1 und B_1, B_2 jeweils Grundinstanzen davon. zz: Wenn $C \equiv \text{Res}(B_1,\ B_2)$, dann gibt es ein $C^* \equiv \text{Res}(A_1,\ A_2)$ und C ist eine Grundinstanz von C*.

Aufgabe 28

a)

Entwickle ein Entscheidungsverfahren für die Allgemeingültig für Formeln der quantifizierten Aussagenlogik

b)

Entwickle ein Entscheidungsverfahren für die Allgemeingültig für Formeln der quantifizierten Gleichheitslogik.

c)

Entwickle ein Entscheidungsverfahren für die Allgemeingültig für Formeln der Form $\forall x_1 \cdots \forall x_n : \exists y_1 \cdots y_m : A[x_1, \cdots x_n, y_1, \cdots y_m]$

Aufgabe 29

Sei Σ eine nicht leere Formelmenge über die Aussagenlogik, $A \in F$ und $\Sigma \models A$.
Zeigt oder widerlegt:

a)

$$\exists n \in \mathbb{N} : \exists A_1, \cdots A_n \in \Sigma : \neg A \models A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n \to A$$

b)

$$\exists n \in \mathbb{N} : \exists A_1, \cdots A_n \in \Sigma : \neg A \models \neg(A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n)$$

Aufgabe 30

Seien T_R eine Theorie zu der Relationalstrukur R.

a)

Zeige das T_R konsistent ist.

b)

Zeige das T_R vollständig ist.

c)

Gebe zwei Relationalstrukturen R_1, R_2 an, sodass für alle Formeln A gilt

$$R_2 \models A \curvearrowright R_1 \models A$$

aber nicht umgekehrt.

d)

Folgere aus c), dass es zwei vollständige konsistente Theorien gibt die nicht gleich sind.