Übungsklausur

Jan Bormann

16 Juli 2010

Aufgabe 1

Überprüfe ob die Formeln Tautolgien sind mittels Davis-Putnam:

1. $((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \leftrightarrow C)) \rightarrow (((\neg A \wedge \neg B) \vee (B \leftrightarrow \neg C)) \rightarrow \neg(A \vee B))$
2. $((A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee A) \wedge (\neg B \vee \neg A))$
   $\rightarrow ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \rightarrow (B \vee C))$
3. $(\neg B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg B \wedge \neg C \wedge \neg D \wedge E) \vee D$
   $\vee(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C) \vee (C \wedge E) \vee (\neg E \wedge B) \vee (\neg C \wedge E)$

Aufgabe 2

Finde eine erfüllende Interpretation welche alle drei Formeln gleichzeitig erfüllt.

- $\forall x : ((((((x * x) * x) * x) * x) * x) * x = x)$
- $\exists x : \neg(((((x * x) * x) * x) * x) * x = x)$
- $\forall x : \forall y : \forall z : (\neg(x = y) \wedge \neg(x = x * y) \wedge \neg(y = y * x)) \rightarrow ((x * y) * z = z)$

Aufgabe 3

Prüfe jeweils ob es ein MGU gibt und berechne ihn ggf.

1. $S_1 = \{p(x, f(x, y), g(y)); p(g(y), f(w, z), w)\}$
2. $S_2 = \{q(v, w, x, y, z, u); q(h_3(u), h_2(v), h_1(w), g_1(x), g_2(y), g_3(z))\}$
3. $S_3 = \{p_1(g(x_1), x_2, x_3, x_4, x_5); p_2(y_1, f(y_1), g(x_2), h(x_3), w))\}$
4. $S_4 = \{f(g_1(u), g_2(v), g_3(w), g_4(x), g_5(y), g_6(z)); f(v, w, x, y, z, g_6(g_5(y)))\}$
5. $S_5 = \{q(x_1, g(x_1), h(x_3)); q(f(x_2, a), x_3, x_4)\}$

Aufgabe 4

Überprüfe ob es sich um Allgemeingültige Formeln handelt mittles Tableau

1. $\forall y[(\exists x[\neg p(x, y)] \wedge \forall z[\neg q(y, z)]) \vee (\neg(\exists u[q(y, u)]) \rightarrow \exists u[\neg p(u, y)])]$
2. $\forall z[[[q(z) \wedge p_1(a, f(z))] \rightarrow [q(z) \vee p_1(a, f(z))]] \wedge \neg(\forall x[p_2(x)] \vee \forall y[\neg p_2(y)])]$

Aufgabe 5

Bestimme die Klauselform folgender Formeln

1. $p(x_2, x_1) \vee \neg\exists x_2[q(x_2) \wedge \forall x_3[q(x_3) \vee p(x_3, x_2)]]$
2. $\forall x_1[p(x_1, x_2) \vee \forall x_1[q(x_1) \rightarrow \exists x_2[p(x_1, x_2)]] \vee q(x_3)]$
3. $\forall x_4[\exists x_1[\forall x_2[q(x_1, x_2)] \rightarrow [p(x_1) \vee p(x_3)] \rightarrow \exists x_2[p(x_2) \vee p(x_4)]]]$

Aufgabe 6

Überprüfe ob es sich um Allgemeingültige Formeln handelt mittles Resolution

1. $\neg[\forall x \forall y\{(p(x, a) \vee \neg q(b, y)) \wedge (\neg p(f(x), x) \vee \neg q(y, x)) \wedge q(x, y)\}]$
2. $\exists y[(\exists x[\neg p(x, y)] \wedge \forall z[\neg q(y, z)]) \vee (\neg(\exists u[q(y, u)]) \rightarrow \exists u[\neg p(u, y)])]$
3. $\exists z[[[q(z) \wedge p_1(a, f(z))] \rightarrow [q(z) \vee p_1(a, f(z))]] \wedge \neg(\forall x[p_2(x)] \vee \forall y[\neg p_2(y)])]$

Aufgabe 7

Zeige oder Widerlege ohne Verwendung von Tableaux, Resolution oder einem Deduktiven System der PL folgende Aussagen

1. $\models \forall P \exists Q[P \leftrightarrow Q]$
2. $\forall x[p(x) \wedge q(x)] \quad |{=}| \quad \forall x[p(x)] \wedge \forall x[q(x)]$
3. $\forall x[p(a) \vee q(x)] \quad |{=}| \quad p(a) \vee \forall x[q(x)]$
4. $\exists x[p(x) \vee q(x)] \quad |{=}| \quad \exists x[p(x)] \vee \exists[q(x)]$
5. $\exists x[p(x) \wedge q(x)] \quad |{=}| \quad \exists x[p(x)] \wedge \exists[q(x)]$
6. $\models \exists x[p(x) \wedge q(x)]$ gdw $\models \exists x[p(x)] \wedge \exists[q(x)]$

Aufgabe 8

1. Gebe ein Herbrand-Model für

   $$(\exists x[\neg p(x, a)] \wedge [\neg q(a, z)]) \vee (\neg(\exists u[q(a, u)]) \rightarrow [\neg p(f(u), a)])$$

   an.

2. Gebe eine erfüllbare Formel an, welche keine Gleichheit benutzt und für die es kein Herbrand-Modell gibt.

Aufgabe 9

Konstruiere ein minimales Modell mittels Tableaux für folgende Formel $\forall u \forall v \forall w \forall x \exists y :$ $\neg(x = y) \wedge \neg(u = y) \wedge \neg(v = y) \wedge \neg(w = y)$

Aufgabe 10

Zeige oder Widerlege folgende Behauptung. Sei A eine erfüllbare Formel der Prädikatenlogik 1. Stufe, dann gilt: Es gibt eine Interpretation $I = (D, I_c, I_v)$ mit $I(A) = 1$, sodass es eine Surjektion von $\mathbb{N}$ nach D gibt.

Aufgabe 11

Sei $I = (D, I_c, I_v)$ mit

- $D = \mathbb{N}$
- $I_c(t)(d_1, d_2) = 1$ gdw $d_1|d_2$
- $I_c(u)(d) = 1$ gdw $d \text{mod} 2 = 1$
- $I_c(<) =<_{\mathbb{N}}$
- $I_c(p)(d) = 1$ gdw d ist Prime

Bestimme

- $I(\exists x : (\neg u(x)) \to p(x))$
- $I(\forall y\{p(y) \to \forall x[< (x, y) \to \neg t(x, y)]\})$