Übungen zur Vorlesung Formale Spezifikations- und Verifikationstechniken

38. Aufgabe: [Standard-Kombinatoren]

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Gleichungen für die Standard-Kombinatoren $I \equiv \lambda x.x$, $K \equiv \lambda xy.x$, $B \equiv \lambda xyz.x(yz)$, $K_* \equiv \lambda xy.y$, $S \equiv \lambda xyz.xz(yz)$:

1. $IM = M$, 2. $KMN = M$, 3. $K_*MN = N$, 4. $SMNL = ML(NL)$, 5. $BLMN = L(M(N))$

39. Aufgabe: [Zahldarstellungen]

Gegeben seien folgende Zahlendarstellungen im λ-Kalkül:

1. $c_0 \equiv \lambda fx.x$, $c_{n+1} \equiv \lambda fx.f^{n+1}(x)$
2. $d_0 \equiv I$, $d_{n+1} \equiv [\text{false}, d_n]$
3. $z_0 \equiv KI$, $z_{n+1} \equiv SBz_n$

Dabei seien $F^0(M) \equiv M$, $F^{n+1}(M) \equiv F(F^n(M))$, true $\equiv K$, false $\equiv K_*$, $[M,N] \equiv \lambda z.zMN$.

Zeigen Sie:

1. Es existieren Terme T, T^{-1} mit $Tc_n \equiv d_n$ und $T^{-1}d_n \equiv c_n$ für alle n.
2. Es existieren Terme R, R^{-1} mit $Rd_n \equiv z_n$ und $R^{-1}z_n \equiv d_n$ für alle n.

40. Aufgabe: [Selbstbezügliche Interpretation]

Gegeben sei folgende Kodierung von λ-Termen. Dabei seien die Menge der Variablen definiert durch $v^{(0)} = v$, $v^{(n+1)} = v^{()}n'$, die Menge der Konstanten $c^{(n)}$ analog.

1. $\langle a, b\rangle = 2^{a+1}3^{b+1}$
2. $\sharp v^{(n)} = \langle 0, n\rangle$, $\sharp c^{(n)} = \langle 1, n\rangle$, $\sharp(MN) = \langle 2, \langle \sharp M, \sharp N\rangle\rangle$, $\sharp\lambda x.M = \langle 3, \langle \sharp x, \sharp M\rangle\rangle$
3. $\ulcorner n\urcorner = z_n$, Notation: $\ulcorner M\urcorner = \ulcorner \sharp M\urcorner$

Durch die Kodierungsfunktion $\sharp$ wird jedem Term eine nat. Zahl und durch die Funktion $\ulcorner\cdot\urcorner$ jeder Zahl ein Term zugeordnet.

Zeigen Sie: Es gibt einen selbstbezüglichen Interpreter E, der für jeden geschlossenen λ-Term M ohne Konstanten folgende Gleichung erfüllt:

$$E\ulcorner M\urcorner = M$$

Abgabe: bis 16.02.2006, per EMail an Bernd Strieder